Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A.U : 2021-2022.

Contrôle continu : *Mesure et intégration* - L3 Math
Jeudi 09/12/2021 - Durée : 1.5 h.

Exercice 1 : (9 points)

I) On considère un espace mesurable (E, Σ).

1 **1)** Donner la définition d'une mesure sur E ?

2 **2)** Citer deux propriétés d'une mesure ? Démontrez les ?

II) On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu et mesure de Lebesgue μ.
On définit la suite de fonctions $f_n(t) = n \cdot \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1 **3)** Est ce que f_n est mesurable ?

1.5 **4)** Calculer la limite $\mu-$ presque partout de $\{f_n\}_n$? notons cette limite f.

1.5 **5)** Calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mu(x)$?

6) Comparer avec $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x)$? Déduire ?

2 **Exercice 2** : (11 points)

On considère $X := \mathbb{N}$, muni de la tribu de parties $\mathcal{P}(X)$. Si $\phi \subsetneq E \subset X$, on définit

$$\nu(E) := \sum_{n \in E} \frac{1}{n!} \quad (\text{et } \nu(\phi) = 0).$$

2 **1)** Montrer que ν est une mesure ?

1+1 **2)** Est ce que $(X, \mathcal{P}(X), \nu)$ est un espace mesuré fini ? $\sigma-$ fini ?

1.5 **3)** Cherchez l'ensemble des parties $A \subset X$ négligeable par rapport à $(X, \mathcal{P}(X), \nu)$?

1.5 **4)** Montrer que n'importe quel fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable ?

1 **5)** Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Montrez que si $A \subsetneq B$ alors $\nu(A) < \nu(B)$?

6) Pour chaque $n \in X$, on définit $A_n = \{k \in X : k^2 < n\}$ et $B_n := X \setminus A_n$.

2+1 Calculez $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$? Déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(B_n)$?

Bonne chance.
Y.O.BOUKARABILA

Corrigé du C.C. Mesure L3 02/01/2022

S. Ex. 1 :

I)

1) & 2) (Voir cours)

II)

3) Puisque $[0, \frac{2}{n}]$ est mesurable par rapport à la tribu de Lebesgue alors $\chi_{[0,\frac{2}{n}]}(\cdot)$ est Lebesgue mesurable. Ensuite, $\lambda . \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(\cdot)$ est mesurable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $f_n(\cdot)$ est mesurable.

4) Pour $t \in \mathbb{R}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq k$ $t \notin [0, \frac{2}{n}]$ donc $f_n(t) = 0$. À la limite $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = 0$ $\forall t \neq 0$.

↳ Si $t = 0$, alors $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = +\infty$. Mais $\{0\}$ est de mesure nul.

C.L : $f(t) = 0$ est la limite p.p. de $f_n(\cdot)$.

5)
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} n . \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(x)\, dx$$
$$= n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(x)\, dx$$
$$= n . \ell([0, \tfrac{2}{n}])$$
$$= n . \frac{2}{n} = 2 . \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

6) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 2.$

Par contre, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0.$

CL: On ne peut pas toujours permuter entre la limite et l'intégrale.

5. Ex. 2:

1) i) $\nu(\phi) = 0 < +\infty$ donc il existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\nu(A) < +\infty$.

ii) Soient $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que $A_i \cap A_m = \phi$ si $i \neq m$.

$$\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) := \sum_{n\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \frac{1}{n!}$$

Noter:

$n \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \iff \exists! i \quad n \in A_i$

(les A_i sont 2 à 2 disjoints)

Ensuite,

$$\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n\in A_i} \frac{1}{n!}\Big)$$

($\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ est absolument cgte donc on peut effectuer une sommation par paquet).

Ainsi,

$$\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i).$$

C.Q.F.D.

2)

- $\nu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e$, donc $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ est un espace mesuré fini.

- Pour un espace mesuré : fini $\Rightarrow$ σ-fini.] 1ère Méthode

Ou bien,

$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$ et $\nu(\{n\}) = \frac{1}{n!} < +\infty$] 2ème Méthode

"$\bigcup$" dénombrable

donc espace mesuré σ-fini.

3) $A \subset \mathcal{P}(X)$ est negligeable alors $\nu(A) = 0$.

Si $A \neq \emptyset$, $\nu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n!} > 0$.

Seul $\emptyset$ qui est negligeable.

4) Soit $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > t\} \subset \mathbb{N}$ donc mesurable.

[Si $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ alors n'importe quel fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable.]

5) $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \subsetneq B$.

il existe en moins $k \in B$ et $k \notin A$. Ensuite,

$$\nu(B) = \sum_{n\in B} \frac{1}{n!} = \sum_{n\in A} \frac{1}{n!} + \left(\sum_{n\in B\setminus A} \frac{1}{n!}\right)$$

Or, $\sum_{n\in B\setminus A} \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{k!} > 0$.

6) Si $k \in A_n$, alors $k^2 < n$ donc $k^2 < n+1$ i.e. $k \in A_{n+1}$

Ainsi, $A_n \subset A_{n+1}$.

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables,

Par le Thm de cgce

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Or, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ $(\subset \checkmark)$

Si $k \in \mathbb{N}$ alors $(\exists n \mid k^2 < n$ i.e. $k \in A_n$.

Finalement, $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(\mathbb{N}) = e$.

$$\nu(B_n) = \nu(X \setminus A_n)$$
$$= \nu(X) - \nu(A_n)$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \nu(\mathbb{N}) - \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$
$$= e - e$$
$$= 0.$$

$\boxed{\text{Fin}}$