Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2021/2022*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Licence L3

Partiel : Equations Différentielles
29 novembre 2021

1h30

Exercice 1: 6.5 pts

Trouver la solution générale de l'équation différentielle d'inconnue y et de variable indépendante x

$$xy' - e^{y'} - y = 0, \qquad (E).$$

Cette solution générale est-elle complète? Justifier.

Exercice 2 : 8 pts

1. Définir un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy

$$(P) \quad \frac{dx}{dt} = -x + t, \; x(0) = 0.$$

2. Que représente pour ce problème (P) la suite des itérations de Picard relativement à ce cylindre ? Calculer ses itérations et conclure.

3. Résoudre par quadrature le problème (P) et comparer avec la méthode de Picard de la question précédente.

Exercice 3 : 5.5 pts

Soit le système différentiel

$$(L) \qquad X' = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0$$

où A est une matrice carrée d'ordre n continue en $t \in I \subset \mathrm{R}$ et $X \in \mathrm{R}^n$.

1. Définir ce qu'est la résolvante $R(t, t_0)$ de (L).

2. Montrer que les colonnes $R_k(t)$, $k = 1..n$, de la résolvante sont des solutions linéairement indépendantes de (L).

Citation : Il y a deux sortes de diplômés : ceux qui ont appris à apprendre et ceux qui ont appris à penser.

Anko Jansen

Université de Tlemcen
Département de mathématiques
Licence L3

Aux 2021/2022

Corrigé du partiel EDO.

Exercice 1 [06.50]

L'équation différentielle (E) est une équation de CLAIRAUT : 0.5

$$y = xy' - e^{y'} \quad (E).$$

Résolution : • On pose $p = y'$ d'où (E) s'écrit

$$y = xp - e^{p} \quad (E_1)$$

• On dérive par rapport à x, on obtient après calcul

$$p'(x - e^{p}) = 0$$

d'où $p' = 0$ ou $x - e^{p} = 0$.

→ $p' = 0$ fournit la solution générale de (E) : 2

$$y(x) = xc - e^{c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

→ $x - e^{p} = 0 \Rightarrow p = \ln x, \quad x > 0$

En remplaçant p par cette expression dans (E_1), on obtient la solution singulière de (E) :

$$y(x) = x \ln x - x. \qquad 2.5$$

Cette solution singulière n'est obtenue pour aucune valeur de la constante c dans l'expression de la solution générale (E).

Ainsi, la solution générale n'est pas complète. 1.5

Exercice 2 : [08.00]

Notez que $f(t,u) := -u+t$ est continue par rapport à t et C^1 par rapport à u. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité d'une solution locale du problème.

(1) Soit le rectangle (ou cylindre)

$$S_{h,r} = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq h \text{ et } |u| \leq r\}$$
$$= [-h,h] \times [-r,r]$$ 0,5

Soit $r>0$ fixé.

- $|f(t,u)| = |-u+t| \leq |u|+|t| \leq r+h$ sur $S_{h,r}$ 0,5

Posons $M := r+h$.

$S_{h,r}$ est alors un rectangle de sécurité si $h \leq \frac{r}{M}$

i.e $h \leq \frac{r}{r+h} \iff h^2+rh-r \leq 0$

$\iff (\ldots) \iff h \in]h_1, h_2[\cap \mathbb{R}_+^*$, où

$h_1 = \frac{-r-\sqrt{r^2+4r}}{2} < 0$ et $h_2 = \frac{-r+\sqrt{r^2+4r}}{2} > 0$

Ainsi $S_{h,r}$ est un cylindre de sécurité si

$h \in]0, h_2]$. 1

(2) La suite des itérations successives de Picard, que nous allons construire plus bas, converge uniformément, pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, vers la solution locale de (P), d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, où $\alpha \leq \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{k}\right)$ avec 1

k la constante de Lipschitz dans $S_{h,r}$.
Ici, il est évident, par linéarité, que $k = 1$.

- Itérations successives de Picard : ($t \in [-\alpha, \alpha]$)

$$\phi_0(t) = 0 \ , \ \phi_1(t) = 0 + \int_0^t f(s, \phi_0(s))\, ds = \int_0^t s\, ds = \frac{t^2}{2},$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t f(s, \phi_1(s))\, ds = \int_0^t \left(-\frac{s^2}{2} + s\right) ds = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2.3}$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t f(s, \phi_2(s))\, ds = \int_0^t \left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2.3} + s\right) ds$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^4}{2.3.4}$$

On montre alors, par récurrence sur k, que

$$\phi_k(t) = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall k \geq 1$$

1,5

que l'on peut déjà écrire :

$$\phi_k(t) = \underbrace{t - 1}_{} + \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \qquad t \in [-\alpha, \alpha]$$

Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure la convergence uniforme de $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers la solution de (P) sur $[-\alpha, \alpha]$,

1

or $\lim_{k \to +\infty} \phi_k(t) = t - 1 + e^{-t}$, $t \in [-\alpha, \alpha]$.

③ Résolution de (P) par quadrature.

Multiplions l'équation différentielle

$$x' + x = t$$

par le facteur intégrant e^t.

On obtient $(e^t x)' = te^t$

d'où, par intégration par parties,

$$e^t x = te^t - e^t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x(t) = t - 1 + c\,e^{-t}.$$

On cherche la solution particulière telle que

$x(0) = 0$, ie $c = 1$, 1.5

d'où la solution $x(t) = t - 1 + e^{-t}$, $\underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$

- On retrouve bien l'expression de la solution donnée par la méthode de Picard, mais on s'aperçoit que cette dernière est très restrictive puisqu'elle fournit une solution sur un petit intervalle $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$ alors que la solution maximale est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. 1

Exercice 3 : [05.50]

(1) On définit la résolvante de (L) comme étant l'unique solution de l'équation matricielle $R' = A(t) \circ R$, $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \in I$ 1.5

telle que $R(t_0) = Id$.
On la note $R(t, t_0)$.

(2) La résolvante sert à exprimer la solution de (L) : $X(t) = R(t, t_0) . X_0$. 1

Considérons en particulier les solutions ψ_k, $k = 1, \dots, n$, de (L) telles que $\psi_k(t_0) = e_k$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On sait alors que, pour $t \in I$,

$$\psi_k(t) = R(t, t_0) . e_k$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} r_{11}(t,t_0) \\ \vdots \\ r_{n1}(t,t_0) \end{matrix}}}_{R_1(t)} & \cdots & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} r_{1k}(t,t_0) \\ \\ r_{nk}(t,t_0) \end{matrix}}}_{R_k(t)} & \cdots & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} r_{1n}(t,t_0) \\ \\ r_{nn}(t,t_0) \end{matrix}}}_{R_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

bien placé

$$= \begin{pmatrix} r_{1k}(t,t_0) \\ \vdots \\ r_{nk}(t,t_0) \end{pmatrix} = R_k(t).$$

(P5)

Ainsi, les colonnes $R_k(t)$, $k=1,\dots,n$, de la résolvante $R(t,t_0)$ sont des solutions de (L), celles-là mêmes qui valent e_k en t_0. 1.5

Pour établir que ces solutions sont linéairement indépendantes pour tout $t \in I$, il suffit de le montrer pour $t=t_0$. 1.5

Or $\{R_1(t_0), R_2(t_0), \dots, R_n(t_0)\} = \{\psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0)\}$

$= \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonique dont les éléments sont bien sûr lin^t indépendants

D'où la conclusion.

?

Rien ne vaut la rigueur mathématique !

(P6)