Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité sur le domaine de définition, l'existence des dérivées partielles premières et enfin la différentiabilité en chaque point.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 : Pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, posons $Q(x) = x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$. On définit l'ensemble Ω par $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 > 0 \text{ et } Q(x) > 0\}$. Soit β un paramètre réel.

1. Calculer, pour $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial Q(x)^\beta}{\partial x_i}$ puis $\dfrac{\partial^2 Q(x)^\beta}{\partial x_i \partial x_j}$.
2. En déduire $\Box Q(x)^\beta$ où $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur de d'Alembert.
3. Déterminer enfin β pour que $\Box Q(x)^\beta = 0$.

Exercice 3 : On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$$

où $\|x\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour deux éléments A et B on a $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$.
2. On définit deux fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow & f(X) = X^2 \end{array} \quad , \quad g : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow & g(X) = X.X^T \end{array}$$

   Déterminer le domaine de définition de chacune de ces deux fonctions. Montrer ensuite qu'elles sont continues et différentiables en précisant la différentielle de chacune.

Exercice 4 : Considérons la fonction

$$f(x,y) = x\cos(y) - y\cos(x) + \sin(xy)$$

Écrire les deux versions (avec reste de Lagrange et reste intégral) de la formule de Taylor en $(0,0)$ à l'ordre 2.

Exercice 5 : On considère les deux applications suivantes

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = (u = e^x \cos y, v = e^x \sin y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & g(x,y,z) = (u = x+y+z, v = xy+xz+yz, w = xyz) \end{array}$$

Déterminer tous les points où chacune de ces deux applications est localement inversible. Étudier ensuite l'inversibilité globale.

Exercice 6 : (Racine carrée de matrice) Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la fonction définie par $S(X) = X^2$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de la matrice identité I_n dans lequel S constitue un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image.

Exercice 7 : Soit l'équation

$$y^3 + (x^3+1)y^2 - y + x^4 = 1$$

Montrer qu'au voisinage du point $(-1,1)$, cette équation définit y comme fonction de x de classe C^2. Donner ensuite le développement limité de cette fonction au voisinage de -1 à l'ordre 2.

Exercice 8 : Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les points critiques, puis étudier leurs natures (dégénérescence, maximum, minimum, point selle).

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy \quad , \quad g(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2 \quad , \quad h(x,y) = x^2 + y^3$$

2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 4 - 2021/2022.

Module : "Analyse IV" - Corrigé de la série de T.D. N° 2.

Exercice 1 : 1°/ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Il est clair que $D_f = \mathbb{R}^2$. Aussi, si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, alors f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), donc continue en (x_0,y_0). Reste à étudier la continuité en $(0,0)$. On a : $(x^2-y^2)^2 \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Mon $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow |f(x,y)| \leq \dfrac{|y|}{2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^3(2x(x^4+y^4)-4x^3\cdot x^2)}{(x^4+y^4)^2} = \dfrac{2xy^3(y^4-x^4)}{(x^4+y^4)^2}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2(3y^2(x^4+y^4)-4y^3\cdot y^3)}{(x^4+y^4)^2} = \dfrac{x^2y^2(3x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}$

Pour les dérivées premières en $(0,0)$, on utilise la définition.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{0-0}{t}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{0-0}{t}\right) = 0$$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy^3(y^4-x^4)}{(x^4+y^4)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2(3x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pour étudier la différentiabilité en $(0,0)$, deux méthodes sont possibles.

Méthode 1 : D'après ce qui précède, si $df_{(0,0)}$ existe, alors forcément

$$df_{(0,0)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0.h_1 + 0.h_2 = 0$$

Voyons si cela peut constituer la différentielle. On applique la déf^{n}.

$$\frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{2h_1h_2^3}{(h_1^4+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

en utilisant la norme euclidienne. Cette fraction n'a pas de limite quand $\|h\| \to 0$, en effet prenons une suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$, alors

$$\frac{2.\frac{1}{n}.\frac{\lambda^3}{n^3}}{\left(\frac{1}{n^4}+\frac{\lambda^4}{n^4}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{\lambda^2}{n^2}}} = \frac{\frac{2\lambda^3}{n^5}}{\frac{1}{n^5}(1+\lambda^4)\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{2\lambda^3}{(1+\lambda^4)\sqrt{1+\lambda^2}}$$

En choisissant deux valeurs de λ, et en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient d'une part $\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) \to (0,0)$ $(\forall \lambda)$ et d'autre part deux limites $\neq$ pour la fraction en question. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Méthode 2 : On sait (d'après le cours) que la différentiabilité est équivalente à l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, en plus de leur continuité. Il suffit d'examiner la continuité en $(0,0)$ de l'une d'elle. Par exemple $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Prenons $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}\left(\frac{3}{n^4}-\frac{1}{n^4}\right)}{\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}\right)^2} = \frac{2/n^8}{4/n^8} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Cela suffit à dire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Pour la différentiabilité en $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, elle a lieu car $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en (x_0,y_0) comme fractions rationnelles.

2°/ $g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Comme dans le cas précédent on peut montrer que $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Alors $|g(x,y,z)| = \dfrac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{|xyz|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}|z|$

et alors $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0 = g(0,0,0) \Rightarrow g$ continue en $(0,0,0)$.

Pour la continuité ailleurs, elle a lieu car g est une fraction rationnelle.

Prenons à présent $(x,y,z) \neq (0,0,0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2-2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{yz(y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(t,0,0)-g(0,0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{0-0}{t}\right) = 0$

D'où $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{yz(y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

De la même façon on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{(xz)(x^2+z^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

et $\dfrac{\partial g}{\partial z} = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

Les trois dérivées première sont manifestement continues en tout point $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ puisque ce sont des fractions rationnelles. Donc g est différentiable en ces points. Reste le point $(0,0,0)$. On peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes exposées précédemment.

Par exemple :

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{2/n^4}{9/n^4} = 2/9 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0)$$

Ceci montre que $\frac{\partial g}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0,0)$ et donc g n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Exercice 2 : Pour $n \geq 2$, on pose $Q(x) = x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1°/ Calcul des dérivées :

$$\frac{\partial (Q(x))^\beta}{\partial x_i} = \beta . Q(x)^{\beta-1} . \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial Q(x)^\beta}{\partial x_i} = \begin{cases} 2\beta x_1 Q(x)^{\beta-1} & \text{si } i=1 \\ -2\beta x_i Q(x)^{\beta-1} & \text{si } i=2,3,\ldots,n. \end{cases}$$

et pour les dérivées secondes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 Q^\beta}{\partial x_1^2} = 2\beta Q(x)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)x_1^2 Q(x)^{\beta-2}} = 2\beta Q(x)^{\beta-2}\left[(2\beta-1)x_1^2 - 2(\beta-1)\sum_{j=2}^{n} x_j^2\right]$$

si $j \geq 2$, $\frac{\partial^2 Q^\beta}{\partial x_1 \partial x_j} = -4\beta(\beta-1)x_1 x_j Q(x)^{\beta-2}$

si $i,j \geq 2$, $i \neq j$, $\frac{\partial^2 Q^\beta}{\partial x_i \partial x_j} = 4\beta(\beta-1)x_i x_j Q(x)^{\beta-2}$

et enfin pour $i \geq 2$, $\boxed{\frac{\partial^2 Q^\beta}{\partial x_i^2} = -2\beta Q(x)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)x_i^2 Q(x)^{\beta-2}}$

2°/ Calcul de $\square Q(x)^\beta$:

$$\square Q(x)^\beta = 2\beta\, Q(x)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)\, x_1^2\, Q(x)^{\beta-2}$$
$$- \sum_{i=2}^{n} \left[-2\beta\, Q(x)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)\, x_i^2\, Q(x)^{\beta-2} \right]$$
$$= 2\beta n\, Q(x)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1) \underbrace{\left(x_1^2 - \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \right)}_{Q(x)} Q(x)^{\beta-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\square Q(x)^\beta = 2\beta\,(2\beta-2+n)\, Q(x)^{\beta-1}}$$

3°/ Pour avoir $\square Q(x)^\beta = 0, \forall x$, on doit résoudre $2\beta(2\beta-2+n)=0$

ce qui donne $\boxed{\beta = 0}$ (évident) ou bien $\boxed{\beta = \frac{2-n}{2}}$

<u>Rque:</u> cas particulier si $n=2$, il n'y a que $\beta=0$ càd $Q(x)^0 \equiv 1$.

<u>Exercice 3:</u> 1°/ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\|A\| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n \ni x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

* Si $A=0 \Rightarrow \|A\|=0$ (évident). Maintenant si $\|A\|=0 \Rightarrow \forall x \neq 0$, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 0$
  d'où $\forall x \neq 0$, $\|Ax\|=0 \Rightarrow Ax=0$, $\forall x \neq 0$, mais aussi $A.0=0$, donc $A=0$.
* $\|\lambda A x\| = |\lambda| . \|Ax\| \leq |\lambda| . \|A\| . \|x\|$ (car $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| . \|x\|$)
  d'où $\frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} \leq |\lambda| \|A\|$ (pour $x \neq 0$) et donc $\|\lambda A\| \leq |\lambda| . \|A\|$.
  Maintenant si $\lambda \neq 0$, alors $\|A\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} . \|\lambda A\| \Rightarrow |\lambda| . \|A\| \leq \|\lambda A\|$
  et donc $\|\lambda A\| = |\lambda| . \|A\|$ (pour $\lambda \neq 0$), mais si $\lambda = 0$, l'égalité est évidente.
* $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \Rightarrow \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\|$
  d'où en passant au sup sur $x \neq 0$, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

* $\|(AB)x\| \leq \|A\| . \|Bx\| \leq \|A\| . \|B\| . \|x\| \Rightarrow \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| . \|B\|$ (si $x \neq 0$)

en passant au sup sur $x \neq 0$, on aura $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$.

2°/ * $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto f(X) = X^2.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un point fixé. Montrons la continuité de f en A.

$$f(X) - f(A) = X^2 - A^2 = (X - A + A)^2 - A^2$$

$$= (X-A)^2 + (X-A)A + A(X-A) + \cancel{A^2} - \cancel{A^2}$$

Donc $\|f(X) - f(A)\| \leq \|(X-A)^2\| + \|(X-A)A\| + \|A(X-A)\|$

$\leq \|X-A\|^2 + 2\|X-A\| \cdot \|A\|$ en utilisant $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Si $\|X-A\| \leq \delta$ alors $\|f(X) - f(A)\| \leq \delta^2 + 2\|A\| \cdot \delta$

Il suffit que $\delta^2 + 2\|A\| \cdot \delta \leq \varepsilon$ pour avoir $\|f(X) - f(A)\| \leq \varepsilon$.

Donc $\delta^2 + 2\|A\|\delta \leq \varepsilon \iff \delta^2 + 2\|A\|\delta + \|A\|^2 \leq \varepsilon + \|A\|^2$

$\iff (\delta + \|A\|)^2 \leq \varepsilon + \|A\|^2 \iff \delta + \|A\| \leq \sqrt{\varepsilon + \|A\|^2}$

et donc $\delta \leq -\|A\| + \sqrt{\varepsilon + \|A\|^2}$

Ainsi en prenant $\delta_\varepsilon \in \left]0, -\|A\| + \sqrt{\varepsilon + \|A\|^2}\right]$ avec $\varepsilon > 0$ on aura

$\|X - A\| \leq \delta_\varepsilon \implies \|f(X) - f(A)\| \leq \varepsilon$ (c'est la continuité en A).

Voyons la différentiabilité en A.

$$f(A+H) = (A+H)^2 = (A+H)(A+H) = \underbrace{A^2}_{f(A)} + \underbrace{AH + HA}_{\text{candidat } df_A(H)} + H^2$$

Donc $\|f(A+H) - f(A) - (AH + HA)\| = \|H^2\| \leq \|H\|^2$

et donc $0 \leq \dfrac{\|f(A+H) - f(A) - (AH+HA)\|}{\|H\|} \leq \|H\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$

ceci prouve que f est différentiable en A et sa différentielle est $\boxed{df_A(H) = AH + HA}$

* $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto g(X) = XX^T \quad \text{où } X^T \text{ est la transposée de } X.$$

Avant de présenter l'étude de g (continuité et différentiabilité) on a besoin d'une inégalité : $\|A^T\| \leq k.\|A\|$ (k constante).

Notons $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, et $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$. Pour cette norme de matrice on a $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$.

En effet, $\|A^T\|_2^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^T x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle A^T x, A^T x\rangle}{\|x\|_2^2}$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\langle AA^T x, x\rangle}{\|x\|_2^2} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|AA^T x\|_2 \cdot \|x\|_2}{\|x\|_2^2} \quad \left(\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|(AA^T)x\|_2}{\|x\|_2} = \|AA^T\|_2 \leq \|A\|_2 . \|A^T\|_2$$

Donc $\boxed{\|A^T\|_2 \leq \|A\|_2}$. En changeant A en A^T alors $(A^T)^T = A$

et $\|A\|_2 \leq \|A^T\|_2 \Longrightarrow \|A\|_2 = \|A^T\|_2$.

D'autre part toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes.

Donc $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tq. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\alpha\|A\|_2 \leq \|A\| \leq \beta\|A\|_2$.

Alors $\|A^T\| \leq \beta\|A^T\|_2 = \beta\|A\|_2 \leq \underbrace{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}_{=k}\|A\|$.

Maintenant pour la continuité de g :

$$g(A+H) = (A+H)(A+H)^T = (A+H)(A^T + H^T) = A.A^T + AH^T + HA^T + H.H^T$$

et $g(A+H) - g(A) = AH^T + HA^T + H.H^T \Longrightarrow$

$$\|g(A+H) - g(H)\| \leq \|A\|.\|H^T\| + \|H\|.\|A^T\| + \|H\|.\|H^T\|$$

$$\leq k\|A\|.\|H\| + \|H\|.\|A^T\| + k\|H\|^2$$

$$\leq \left(k\|A\| + \|A^T\| + k\|H\|\right)\|H\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$$

Ceci implique la continuité en A.

Pour la différentiabilité :

$$g(A+H)-g(A) = \underbrace{AH^T + HA^T}_{dg_A(H)} + H\cdot H^T$$

$$\Rightarrow \|g(A+H)-g(A)-(AH^T+HA^T)\| = \|H\cdot H^T\| \leq \|H\|.\|H^T\|$$
$$\leq k\,\|H\|^2$$

et $$\frac{\|g(A+H)-g(A)-(AH^T+HA^T)\|}{\|H\|} \leq k.\|H\| \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$$

Donc g est différentiable au point A et sa différentielle est

$$\boxed{dg_A(H) = AH^T + HA^T}$$

Exercice 4 : $f(x,y) = x\cos y - y\cos x + \sin(xy)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y\sin x + y\cos(xy) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y - \cos x + x\cos(xy) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cos x - y^2\sin(xy) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos y - x^2\sin(xy) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\sin y + \sin x + \cos(xy) - xy\sin(xy) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -y\sin x - y^3\cos(xy) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x\sin y - x^3\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \cos x - 2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} = -\cos y - 2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy)$$

* Formule de Taylor avec reste de Lagrange :

$$\boxed{f(h_1,h_2) = h_1 - h_2 + h_1 h_2 + R_{Log}(h_1,h_2)}$$

avec $R_{Log}(h_1,h_2) = \frac{1}{6}\Big\{ h_1^3\left(-\theta h_2 \sin(\theta h_1) - \theta^3 h_2^3 \cos(\theta^2 h_1 h_2)\right) +$

$+ 3h_1^2 h_2 \left(\cos(\theta h_1) - 2\theta h_2 \sin(\theta^2 h_1 h_2) - \theta^3 h_1 h_2^2 \cos(\theta^2 h_1 h_2)\right) +$

$+ 3h_1 h_2^2 \left(-\cos(\theta h_2) - 2\theta h_1 \sin(\theta^2 h_1 h_2) - \theta^3 h_1^2 h_2 \cos(\theta^2 h_1 h_2)\right) +$

$+ h_2^3 \left(\theta h_1 \sin(\theta h_2) - \theta^3 h_1^3 \cos(\theta^2 h_1 h_2)\right) \Big\}$; $0 < \theta < 1$

* Formule de Taylor avec reste Intégral :

$$\boxed{f(h_1,h_2) = h_1 - h_2 + h_1 h_2 + R_{Int}(h_1,h_2)}$$

avec $R_{Int}(h_1,h_2) = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\xi)^2 \Big\{ h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi h_1, \xi h_2) + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi h_1, \xi h_2)$

$+ 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi h_1, \xi h_2) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi h_1, \xi h_2) \Big\} d\xi$

Exercice 5 : * $f(x,y) = (u,v)$ avec $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$

Les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ étant des produits de fonctions C^∞ sont elles mêmes C^∞. Donc le caractère C^1 est assuré pour f.

Calculons la jacobienne. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \end{cases}$

d'où $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_f(x,y)) = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x}$

On remarque que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(J_f(x,y)) \neq 0$ donc $J_f(x,y)$ est inversible.

Ainsi par le théorème de l'inversion locale, f est localement inversible au voisinage de n'importe quel point de $\mathbb{R}^2$.

Pour l'inversion globale, on remarque que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(u,v) \neq (0,0)$.

donc $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Aussi $\forall (u,v) \neq (0,0)$, $\exists (x,y)$ tq

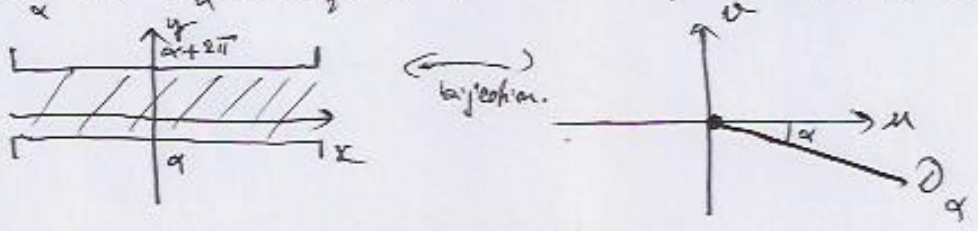
$f(x,y) = (u,v)$; en effet $e^{2x} = u^2 + v^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(u^2+v^2)$.

et $tg(y) = v/u$ (si $u \neq 0$), donc il existe y tq $tg(y) = v/u$.

(Pour $u=0$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$). D'où $\boxed{f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

Donc de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est surjective. Par contre elle n'est pas injective. En effet si $y_1 = y_2 + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin y_1 = \sin y_2 \\ \cos y_1 = \cos y_2 \end{cases}$

càd il existe une infinité d'antécédents au point (u,v), tous les $(x, y + 2k\pi)$. Pour obtenir une bijection il faut réduire l'ensemble de départ. Par exemple si on prend $(x,y) \in \mathbb{R} \times]\alpha, \alpha + 2\pi[$ alors il y aura bijection sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus D_\alpha$ où D_α est la demi-droite faisant l'angle α avec la droite des u.



$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = (u,v,w) \text{ où } \begin{cases} u = x+y+z \\ v = xy+xz+yz \\ w = xyz \end{cases}$$

Comme pour le cas précédent, les fonctions u, v, w étant des polynômes sont C^∞ et donc g est C^∞ aussi. Calculons le jacobienne.

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J_g(x,y,z)) = 1. \begin{vmatrix} y+z & x+y \\ xz & xy \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} y+z & x+y \\ yz & xy \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} y+z & x+z \\ yz & xz \end{vmatrix}$$

$$= xy(x+z) - xz(x+y) - xy(y+z) + yz(x+y) + xz(y+z) - yz(x+z)$$

$$= x\left[yx + \cancel{yz} - xz - \cancel{yz}\right] - y\left[xy + \cancel{xz} - \cancel{xz} - zy\right] + z\left[\cancel{xy} + xz - \cancel{yx} - yz\right]$$

$$= x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)$$

$$= x^2(y-z) - x(y^2-z^2) + yz(y-z)$$

$$= (y-z)\left[x^2 + yz - x(y+z)\right] = (y-z)\left[x(x-y) - z(x-y)\right]$$

$$\boxed{\det(J_g(x,y,z)) = (x-y)(y-z)(x-z)}$$

Notons $P_{xy} = \{(x,y,z) / x-y=0\}$; $P_{xz} = \{(x,y,z) / x-z=0\}$; $P_{yz} = \{(x,y,z) / y-z=0\}$.

Ainsi g est localement inversible en tout point de l'ensemble $\boxed{\mathbb{R}^3 - (P_{xy} \cup P_{xz} \cup P_{yz})}$. L'inversibilité globale n'aura pas lieu à cause de l'injectivité qui tombe en défaut car toute permutation des variables x, y, z garde les valeurs u, v, w inchangées.

Exercice 6 : $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto S(X) = X^2$$

On a $S(I_n) = I_n^2 = I_n$. S est manifestement C^∞ car toutes les composantes sont polynomiales. Il faut voir la jacobienne (différentielle) au point I_n. $S(I_n+H) = (I_n+H)^2 = (I_n+H)(I_n+H)$

$$= I_n + 2H + H^2$$

Si on prend $dS_{I_n}(H) = 2H$, alors $\|S(I_n+H) - S(I_n) - (2H)\| \leq \|H\|^2$

Ainsi on a bien $dS_{I_n}(H) = 2H$.

$$dS_{I_n} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$H \longmapsto dS_{I_n}(H) = 2H$$

C'est une application manifestement inversible car si $(dS_{I_n})^{-1}(H) = \frac{1}{2} \cdot H$.

Donc S est un difféomorphisme local au voisinage de I_n. En d'autre terme il existe une boule de centre I_n et de rayon α (petit) $B(I_n, \alpha)$ tq $S : B(I_n,\alpha) \longrightarrow B(I_n,\alpha)$ demeure bijective. (S^{-1} existe)

Si donc $X \in B(I_n,\alpha)$, $X^2 = Y \in B(I_n,\alpha)$ et inversement si $Y \in B(I_n,\alpha)$, il existe un unique $X \in B(I_n,\alpha)$ tq $X^2 = Y$ ($X = \sqrt{Y}$).

Exercice 7 : $(E) : y^3 + (x^3+1)y^2 - y + x^4 = 1$.

Posons $F(x,y) = y^3 + (x^3+1)y^2 - y + x^4 - 1$. Alors $F(-1,1) = 0$.

Ainsi $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2(x^3+1)y - 1$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,1) = 3.1^2 + 2\cancel{(-1^3+1)}.1 - 1 = 2 \neq 0$.

càd $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,1)$ est inversible. Ainsi au voisinage de $(-1,1)$, on peut trouver une fonction $\varphi(x)$ tq $F(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall x \in V(-1)$. ($y = \varphi(x)$).

D'après le théorème des fonctions implicites, φ est de classe C^1 au voisinage de -1 et

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{3x^2\varphi(x)^2 + 4x^3}{3\varphi(x)^2 + 2(x^3+1)\varphi(x) - 1}$$

On remarque que φ' est un quotient de deux fonctions "fabriquées" avec "x" et φ qui sont de classe C^1, pourvu que le dénominateur ne soit pas nul. Evaluons-le en -1 :

$$3\varphi(-1)^2 + 2\left(\cancel{(-1)^3+1}\right)^{0}\varphi(-1) - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Etant non nul en -1, il restera non nul dans un voisinage de -1 grâce à la continuité. Ainsi φ' est de classe C^1, càd que $\varphi \in C^2$.

On peut alors calculer φ'' à l'aide de x, φ et φ' :

$$\varphi''(x) = \left(\varphi'(x)\right)' = -\left(\frac{3x^2\varphi^2(x) + 4x^3}{3\varphi^2(x) + 2(x^3+1)\varphi(x) - 1}\right)' = \dots\dots$$

Pour écrire le $DL_2(-1)$ de φ, on a besoin de $\varphi(-1)$, $\varphi'(-1)$ et $\varphi''(-1)$.

D'après les données $\boxed{\varphi(-1) = 1}$. On a par une première dérivation :

$$\varphi'(-1) = -\frac{3(-1)^2\varphi^2(-1) + 4(-1)^3}{3\varphi(-1)^2 + 2\cancel{(-1)^3+1}^{\,0}\varphi(-1) - 1} = -\frac{3-4}{2} = \boxed{1/2}$$

Pour $\varphi''(-1)$:

$$\varphi'(x)\left[3\varphi^2(x) + 2(x^3+1)\varphi(x) - 1\right] + 3x^2\varphi^2(x) + 4x^3 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x)\left[3\varphi^2(x) + 2(x^3+1)\varphi(x) - 1\right] + \varphi'^2(x)\left[6\varphi(x) + 2(x^3+1)\right] + 12x^2\varphi'(x)\varphi(x) + 12x^2 + 6x\varphi^2(x) = 0$$

d'où $\varphi''(-1)\left[3 + 0 - 1\right] + \frac{1}{4}\left[6 + 0\right] + \cancel{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} - \cancel{6 \cdot 1} + 12 = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi''(-1) = -\frac{27}{4}}$$

En définitive pour le $DL_2(-1)$:

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{27}{8}(x+1)^2 + (x+1)^2\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \to -1} \varepsilon(x) = 0}$$

Exercice 8 : * $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$

Les points critiques sont les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

càd $\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ -y^2 + x = 0 \end{cases}$

Par la première équation on a $y = -x^2$, en remplaçant dans la 2ème :

$-x^4 + x = 0 \Leftrightarrow -x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow -x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ car $x^2+x+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(\Delta = 1-4 = -3 < 0)$.

On a donc deux points critiques : $\boxed{A(0,0)}$ et $\boxed{B(1,-1)}$

Calculons la hessienne de f :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

i/ $\mathrm{Hess}_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\det \mathrm{Hess}_f(A) = -9 \neq 0$, donc A est un point critique non-dégénéré. Calculons les valeurs propres :

$\det(\lambda I - \mathrm{Hess}_f(A)) = \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda-3)(\lambda+3)$. On a deux valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$. Etant de signes contraires, le point A est un point <u>selle</u>.

ii/ $\mathrm{Hess}_f(B) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\det \mathrm{Hess}_f(B) = 36 - 9 = 27 \neq 0$, B est aussi non-dégénéré. Calculons les valeurs propres : $\begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 \\ -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-6)^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 6 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 > 0 \\ \lambda_2 = 9 > 0 \end{cases}$. Ainsi $\mathrm{Hess}_f(B)$ est une matrice <u>définie positive</u>. Donc <u>B est un minimum local</u>.

* $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$. Les points critiques sont solutions de :

$$\begin{cases} 4x^3 - 8(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 8(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 2(x-y) = 0 \\ y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases}$$

Par addition des deux équations on aura $x^3 + y^3 = 0 \iff (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

L'équation $x^2 - xy + y^2 = 0$ ne possède pas de solution $\neq (0,0)$. En effet si par exemple $y \neq 0$ alors on divise par y^2 et obtenir : $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$

$$t^2 - t + 1 = 0$$

or $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $t^2 - t + 1 \neq 0$, $\forall t$. Donc $x^2 - xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x = y = 0)$

D'autre part si $y = -x$, alors en remplaçant dans la 1ère équation du système on obtient : $x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x-2)(x+2) = 0$

Ainsi on obtient trois (solutions) points critiques :

$$\boxed{A(0,0) \ ; \ B(2,-2) \ ; \ C(-2,2)}$$

Pour leurs natures, on calcule la hessienne de g :

$$Hess_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 8 \\ 8 & 12y^2 - 8 \end{pmatrix}$$

i/ $Hess_g(A) = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$; $\det Hess_g(A) = 64 - 64 = 0$, A est <u>dégénéré</u>.

ii/ $Hess_g(B) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$; $\det Hess_g(B) = 1600 - 64 = 1536 \neq 0$, B est non-dégénéré.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 40 & -8 \\ -8 & \lambda - 40 \end{vmatrix} = (\lambda - 40)^2 - 64 = 0 \Rightarrow \lambda = 40 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 32 > 0 \\ \lambda_2 = 48 > 0 \end{cases}$$

B est un minimum local car $Hess_g(B)$ est définie positive.

iii/ $Hess_g(C) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$. L'étude est la m̂, C est aussi un minimum.

* $h(x,y) = x^2 + y^3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 3y^2 = 0 \end{cases}$$. Ici on a un seul point critique $\boxed{A(0,0)}$.

$\mathrm{Hess}_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_h(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det \mathrm{Hess}_h(A) = 0$

A est un point critique dégénéré.