Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité sur le domaine de définition, l'existence des dérivées partielles premières et enfin la différentiabilité en chaque point.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 : Pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, posons $Q(x) = x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$. On définit l'ensemble Ω par $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 > 0 \text{ et } Q(x) > 0\}$. Soit β un paramètre réel.

1. Calculer, pour $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial Q(x)^\beta}{\partial x_i}$ puis $\dfrac{\partial^2 Q(x)^\beta}{\partial x_i \partial x_j}$.
2. En déduire $\Box Q(x)^\beta$ où $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur de d'Alembert.
3. Déterminer enfin β pour que $\Box Q(x)^\beta = 0$.

Exercice 3 : On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$$

où $\|x\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour deux éléments A et B on a $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$.
2. On définit deux fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow & f(X) = X^2 \end{array} \quad , \quad g: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow & g(X) = X.X^T \end{array}$$

   Déterminer le domaine de définition de chacune de ces deux fonctions. Montrer ensuite qu'elles sont continues et différentiables en précisant la différentielle de chacune.

Exercice 4 : Considérons la fonction

$$f(x,y) = x\cos(y) - y\cos(x) + \sin(xy)$$

Écrire les deux versions (avec reste de Lagrange et reste intégral) de la formule de Taylor en $(0,0)$ à l'ordre 2.

Exercice 5 : On considère les deux applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = (u = e^x \cos y, v = e^x \sin y) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & g(x,y,z) = (u = x+y+z, v = xy+xz+yz, w = xyz) \end{array}$$

Déterminer tous les points où chacune de ces deux applications est localement inversible. Étudier ensuite l'inversibilité globale.

Exercice 6 : (Racine carrée de matrice) Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la fonction définie par $S(X) = X^2$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de la matrice identité I_n dans lequel S constitue un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image.

Exercice 7 : Soit l'équation

$$y^3 + (x^3+1)y^2 - y + x^4 = 1$$

Montrer qu'au voisinage du point $(-1,1)$, cette équation définit y comme fonction de x de classe C^2. Donner ensuite le développement limité de cette fonction au voisinage de -1 à l'ordre 2.

Exercice 8 : Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les points critiques, puis étudier leurs natures (dégénérescence, maximum, minimum, point selle).

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy \quad , \quad g(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2 \quad , \quad h(x,y) = x^2 + y^3$$