Exercice 1 : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x - y|, |x + y|)$. Montrer que N est une norme, puis dessiner la boule de centre $(0, 1)$ et de rayon 2.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré ≤ 2. On pose pour $P \in E$,

$$M_1(P) = |P(0)| + |P(1)| \quad , \quad M_2(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(-1)|$$

Est-il vrai que M_1 et M_2 définissent des normes sur E ?

Exercice 3 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\forall\, x, y \in E$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
2. Soit $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r et x un point dans E. A-t-on les égalités suivantes

$$x + B(a, r) = B(x + a, r) \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda > 0\ ,\ \lambda B(a, r) = B(a, \lambda r)\ ?$$

   On rappelle que pour un sous-ensemble $A \subset E$, $x + A = \{x + y/\ y \in A\}$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On pose pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \sqrt{Tr\,(A.A^T)}$$

où Tr désigne la trace. Montrer que $\|.\|$ définit une norme dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. On définit la distance d'un point x à A, notée $d_A(x)$ par

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

1. Montrer que si $x \in A$, alors $d_A(x) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $d_A(.)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum, c'est-à-dire $\exists x_0$ tel que $f(x_0) = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$.

2ème année de Licence de Mathématiques - Sem 4 - 2021/2022.

Module: « Analyse 4 » - Corrigé de la série de T.D. N° 1.

Exercice 1: Soit $N(x,y) = \max(|x-y|, |x+y|)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a/ Montrons que N est une norme. Remarquons d'abord que $N(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, puisque c'est le maximum de deux expressions ≥ 0, étant des valeurs absolues. Il est clair que si $(x,y) = (0,0) \Rightarrow N(x,y) = 0$.

Examinons la réciproque. Si $N(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-y| \leq 0 \\ \text{et } |x+y| \leq 0 \end{cases}$ ou encore $|x-y| = 0$ et $|x+y| = 0$, donc $\begin{cases} x-y=0 \\ \text{et } x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (résolution facile).

Considérons à présent: $N(\lambda x, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$|\lambda x - \lambda y| = |\lambda|\,|x-y| \leq |\lambda|\, N(x,y)$$

et $$|\lambda x + \lambda y| = |\lambda|\,|x+y| \leq |\lambda|\, N(x,y)$$

donc $$\max(|\lambda x - \lambda y|, |\lambda x + \lambda y|) \leq |\lambda|\, N(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N(\lambda x, \lambda y) \leq |\lambda|\, N(x,y)}$$

Inversement, prenons $\lambda \neq 0$ alors l'inégalité précédente donne:

$$N(x,y) = N\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x, \frac{1}{\lambda}\lambda y\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x, \lambda y)$$

$\Leftrightarrow \boxed{|\lambda|\, N(x,y) \leq N(\lambda x, \lambda y)}$, d'où $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, N(x,y)$ au moins pour $\lambda \neq 0$. Pour $\lambda = 0$, l'égalité est évidente.

Prenons enfin deux vecteurs (x,y) et (x',y'). Alors

$$|x+x' - (y+y')| = |x-y+x'-y'| \leq |x-y| + |x'-y'| \leq N(x,y) + N(x',y')$$

et $$|x+x' + (y+y')| = |x+y+x'+y'| \leq |x+y| + |x'+y'| \leq N(x,y) + N(x',y')$$

d'où $$N(x+x', y+y') \leq N(x,y) + N(x',y').$$

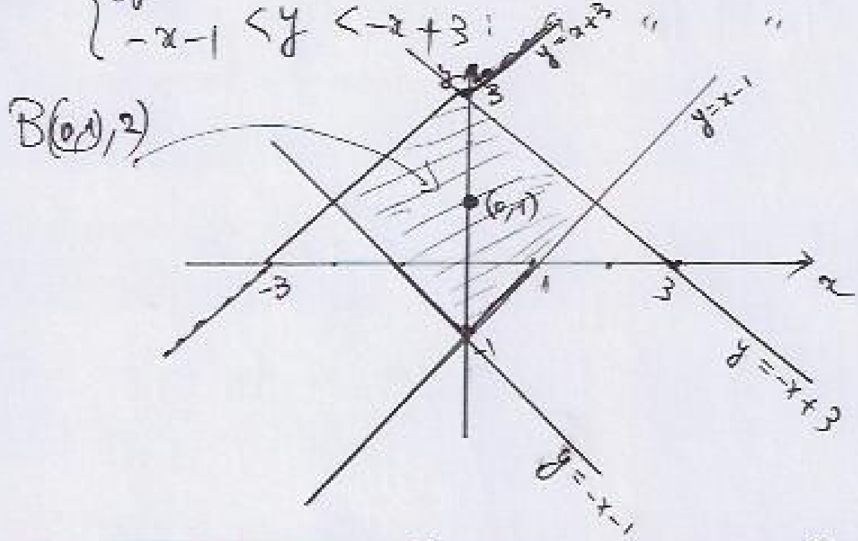
b/ Dessin de la boule $B((0,1),2)$: $B((0,1),2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / N(x,y-1) < 2\}$

$$N(x,y-1) < 2 \Leftrightarrow \max(|x-y+1|, |x+y-1|) < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y+1| < 2 \\ \text{et } |x+y-1| < 2 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} -2 < x-y+1 < 2 \\ \text{et} \\ -2 < x+y-1 < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x-3 < -y < -x+1 \\ \text{et} \\ -x-1 < y < -x+3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-1 < y < x+3 : \text{bande entre deux droites parallèles} \\ \text{et} \\ -x-1 < y < -x+3 : \quad " \quad\quad " \quad\quad " \end{cases}$



Exercice 2 : $E = \mathbb{R}_2[X]$: espace des polynômes réels de degré ≤ 2.

$M_1(P) = |P(0)| + |P(1)|$

$M_2(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(-1)|$

Soit $P \in E$, $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.

$P(0) = a_0$; $P(1) = a_0 + a_1 + a_2$; $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2$.

* Pour $M_1(P) = |a_0| + |a_0 + a_1 + a_2|$ on a : $M_1(P) = 0 \Rightarrow |a_0| = 0$ et $|a_0 + a_1 + a_2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$ il y a une infinité de solutions, ce sont tous les polynômes de la forme $P(X) = a_1(X - X^2)$, $a_1 \in \mathbb{R}$ qq. donc M_1 n'est pas une norme à cause du 1er axiome.

* Pour $M_2(P) = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$.

La vérification des axiomes 2 et 3 est laissé au lecteur (facile).

Donc M_2 est une norme,

Exercice 3 : $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

1°/ Pour montrer l'inégalité en question, posons $\boxed{u = x+y,\ v = x-y}$ alors $x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ et $y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$. D'où

$$\|x\| \leq \|\tfrac{1}{2}u\| + \|\tfrac{1}{2}v\| \Rightarrow \|x\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$$

et $\|y\| \leq \|\frac{1}{2}u\| + \|-\frac{1}{2}v\| \Rightarrow \|y\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$

Par addition on obtient : $\boxed{\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|}$

Pour la deuxième inégalité, remarquons que

$$\|x+y\| \leq \max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)$$

et $\|x-y\| \leq \max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)$

d'où $\boxed{\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)}$

2°/ i/ A-t-on $x + B(a,r) = B(x+a,r)$?

$$x + B(a,r) = \{x+y \,/\, \|y-a\| < r\}$$
$$B(x+a,r) = \{z \in E \,/\, \|z-x-a\| < r\}$$

Soit $x+y \in x+B(a,r)$. Posons $z = x+y$ alors $y = z-x$ et on a que $\|y-a\| < r$, càd $\|z-x-a\| < r \Rightarrow z \in B(x+a,r)$, d'où $x+B(a,r) \subset B(x+a,r)$. Inversement, si $z \in B(x+a,r)$ alors $\|z-(x+a)\| < r \Leftrightarrow \|(z-x)-a\| < r$ ou encore $z-x \in B(a,r)$ si on pose $y = z-x \Rightarrow z = x+y$ et donc $z \in x+B(a,r)$.

En définitive $\boxed{x + B(a,r) = B(x+a,r)}$

ii/ Soit $x \in \lambda B(a,r)$ càd $x = \lambda y$ avec $\|y-a\| < r$. Donc

$\|x-a\| = \|\lambda y - a\| = \|\lambda(y-a) + (\lambda-1)a\| \leq \lambda\|y-a\| + |\lambda-1|\cdot\|a\| < \lambda r + |\lambda-1|\|a\|$.

On voit que si $a = 0$ alors $\|x\| < \lambda r \Rightarrow x \in B(0,\lambda r)$. Mais si $a \neq 0$ ceci semble ne pas marcher. Pour montrer cela, il suffit d'exhiber un contre exemple. $E = \mathbb{R}$ et la norme c'est la valeur absolue $|\cdot|$.

Prenons $a = 1$ et $r = 1$, $B(1,1) =]0,2[\Rightarrow \lambda B(1,1) =]0,2\lambda[$ $(\lambda > 0)$

mais $B(1,\lambda) =]1-\lambda, 1+\lambda[\neq]0,2\lambda[$.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de toutes les matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\text{trace}(A.A^T)}.$$

Il s'agit de montrer que $\|.\|$ est une norme.

Prenons $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, alors $(A^T)_{ij} = a_{ji}$; ensuite

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{jk} \text{ et alors}$$

$$Tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n (AA^T)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$$

Ainsi $\|A\|$ est tout simplement la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regardé comme $\mathbb{R}^{n^2}$. Mais vérifions quand même les axiomes d'une norme.

1/ $\|A\| = 0 \iff Tr(AA^T) = 0 \iff \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 = 0 \iff \forall i,k = 1,\dots,n,\ a_{ik} = 0.$

2/ $\|\lambda A\| = \sqrt{Tr((\lambda A)(\lambda A)^T)} = \sqrt{Tr(\lambda^2 A A^T)} = \sqrt{\lambda^2 Tr(AA^T)} = |\lambda| \cdot \|A\|.$

3/ Pour l'inégalité triangulaire on doit passer par une inégalité de Cauchy-Schwarz. Prenons $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|A + \lambda B\|^2 = Tr\left[(A+\lambda B)(A^T + \lambda B^T)\right] = Tr\left[AA^T + \lambda(AB^T + BA^T) + \lambda^2 BB^T\right]$$

$$= \|A\|^2 + \lambda\, Tr(AB^T + BA^T) + \lambda^2 \|B\|^2 \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

donc $\Delta = \left(Tr(AB^T + BA^T)\right)^2 - 4\|A\|^2 \|B\|^2 \leq 0$.

Sachant que $Tr(A) = Tr(A^T)$ alors $Tr(BA^T) = Tr((BA^T)^T) = Tr(AB^T)$

d'où $Tr(AB^T + BA^T) = 2\,Tr(AB^T)$ et donc $\Delta = 4\left[Tr^2(AB^T) - \|A\|^2\|B\|^2\right]$.

Donc pour $\lambda = 1$ $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + 2\,Tr(AB^T) + \|B\|^2$

$$\leq \|A\|^2 + 2\|A\| \cdot \|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2$$

et donc $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Exercice 5 : $\|\cdot\|$ norme qcq sur $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x-y\|.$$

1°/ i/ On a $\forall y \in A$, $\|x-y\| \geq 0$ et donc $d_A(x) \geq 0$. Mais si $x \in A$ cela veut dire que l'un des $y \in A$ est justement x donc parmi les quantités $\|x-y\|$ il y a $\|x-x\|=0$ et donc le 0 est atteint càd $d_A(x)=0$ (si $x \in A$).

ii/ La réciproque : examinons ce que signifie $d_A(x)=0$. D'après la ε-caractérisation de la borne inférieure, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y_\varepsilon \in A \text{ tq } \ d_A(x) \leq \|x-y\| < d_A(x) + \varepsilon$$

Si par exemple $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ alors $\exists y_n \in A$ tq $d_A(x) \leq \|x-y_n\| < d_A(x) + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x-y_n\| = 0$. Ceci veut dire que la suite (y_n) dans A converge vers le point x. Ainsi $x \in \bar{A}$ (l'adhérence de A).

Dans le cas où $A \neq \bar{A}$, $\exists x_0 \in \bar{A}$ et $x_0 \notin A$, dans ce cas $d_A(x_0)=0$ et $x_0 \notin A$. Conclusion : $\boxed{d_A(x) \in A \Leftrightarrow x \in \bar{A}}$

2°/ Continuité de $d_A(\cdot)$: nous avons montré dans le cours que $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u-v\|.$$

Alors $\big| \|x-y\| - \|x_0-y\| \big| \leq \|x-x_0\|$

$$\Rightarrow \|x-y\| - \|x_0-y\| \leq \|x-x_0\| \Rightarrow \|x-y\| \leq \|x_0-y\| + \|x-x_0\|$$

Or $\forall y \in A$, $d_A(x) \leq \|x-y\|$, d'où $d_A(x) \leq \|x_0-y\| + \|x-x_0\|$ et donc $d_A(x) - \|x-x_0\| \leq \|x_0-y\|$, càd $d_A(x) - \|x-x_0\|$ est un minorant des quantités $\|x_0-y\|$ pour y variant dans A. Il est alors plus petit que le plus grand des minorants qui est $d_A(x_0)$. Nous avons obtenu que $d_A(x) - d_A(x_0) \leq \|x-x_0\|$. En changeant x en x_0 et x_0 en x on obtient $d_A(x_0) - d_A(x) \leq \|x-x_0\|$. En définitive

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leq \|x-x_0\|$$

d'où la continuité de $d_A(\cdot)$.

Exercice 6: $\|\cdot\|$ norme qcq sur $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^n$; et $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Ecrivons la définition:

$$\forall A > 0, \exists B_A > 0 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}^n, \left[\|x\| > B_A \Longrightarrow f(x) > A\right]$$

Cela signifie que sur l'ensemble $E_A = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| > B_A\}$, la fonction f est minorée donc $\inf_{x \in E_A} f(x)$ existe.

Fixons à présent $A > 0$. Le complémentaire de E_A dans $\mathbb{R}^n$ est $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq B_A\}$ c'est la boule fermée de centre O et de rayon B_A. Cette boule est compacte car fermée, bornée. L'hypothèse de continuité de f implique que sur cette boule f est bornée et atteint même ses bornes, en particulier la borne inférieure. Nous sommes arrivés à la situation suivante: $\mathbb{R}^n = E_A \cup \complement_{\mathbb{R}^n} E_A$.

Sur E_A, $\inf_{x \in E_A} f(x)$ existe, appelons le α; et sur $\complement_{\mathbb{R}} E_A = B(0, B_A)$ l'inf existe aussi, appelons-le β. Donc sur $\mathbb{R}^n$, $f(x) \geq \min(\alpha, \beta)$ donc $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x) = \gamma$ existe. Maintenant la ε-caractérisation de la borne inférieure dit que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in \mathbb{R}^n : \gamma \leq f(x_k) < \gamma + \frac{1}{k}$

Ainsi $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = \gamma$. La suite (x_k) est forcément bornée car sinon il existerait une sous-suite (x_{k_ℓ}) tq $\lim_{\ell \to +\infty} \|x_{k_\ell}\| = +\infty$ et cela va donner $\lim_{\ell \to +\infty} f(x_{k_\ell}) = +\infty$ or $\lim_{\ell \to +\infty} f(x_{k_\ell}) = \gamma$. Contradiction.

La bornitude de la suite (x_k), implique $\exists (x_{k_m})$ une sous-suite convergente vers un $a \in \mathbb{R}^n$. Donc $\lim_{m \to +\infty} \|x_{k_m} - a\| = 0$ et donc $\lim_{m \to +\infty} f(x_{k_m}) = f(a) = \gamma$. cqfd.