Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x - y|, |x + y|)$. Montrer que N est une norme, puis dessiner la boule de centre $(0, 1)$ et de rayon 2.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré ≤ 2. On pose pour $P \in E$,

$$M_1(P) = |P(0)| + |P(1)| \qquad , \qquad M_2(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(-1)|$$

Est-il vrai que M_1 et M_2 définissent des normes sur E ?

Exercice 3 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\forall\, x, y \in E$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
2. Soit $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r et x un point dans E. A-t-on les égalités suivantes

$$x + B(a, r) = B(x + a, r) \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda > 0\ ,\ \lambda B(a, r) = B(a, \lambda r)\ ?$$

On rappelle que pour un sous-ensemble $A \subset E$, $x + A = \{x + y/\ y \in A\}$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On pose pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \sqrt{Tr\,(A.A^T)}$$

où Tr désigne la trace. Montrer que $\|.\|$ définit une norme dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. On définit la distance d'un point x à A, notée $d_A(x)$ par

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

1. Montrer que si $x \in A$, alors $d_A(x) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $d_A(.)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum, c'est-à-dire $\exists x_0$ tel que $f(x_0) = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$.