Université de Tlemcen
Faculté des Sciences 2021/2022
Département de Mathématiques
L2 Mathématiques

Examen de rattrapage d'analyse numérique 2

Exercice 1 (6 points)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & -4 \\ -3 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice A est symétrique définie positive.
2. Déterminer la factorisation de Cholesky de la matrice A puis en déduire $\det(A)$.
3. En utilisant la factorisation de A, résoudre le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}^T$.

Solution
1. Il est clair que A est symétrique puisque $A^T = A$.
La matrice A est à diagonale positive et strictement dominante puisque:

$$\begin{cases} 9 = a_{11} > |a_{12}| + |a_{13}| = 6, \\ 10 = a_{22} > |a_{21}| + |a_{23}| = 7, \\ 11 = a_{33} > |a_{13}| + |a_{12}| = 7. \end{cases}$$

elle est définie positive.
2. La factorisation de Cholesky de A.

$$\begin{array}{lll} \text{Colonne 1} & \text{Colonne 2} & \text{Colonne 3} \\ l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 & & \\ l_{21} = \dfrac{a_{21}}{l_{11}} = 1 & l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 3 & \\ l_{31} = \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = -1 & l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = -1 & l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 3 \end{array}$$

Donc

$$A = LL^T,$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcul du déterminant de A.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(LL^T\right) = \det(L)\det(L^T) \\ &= (\det(L))^2 = 27^2 = 729. \end{aligned}$$

3. Résolution du système $Ax = b$.

$$Ax = b \Longleftrightarrow LL^T x = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$L^T x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

la solution est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (4 points)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 14 & 7 \\ 6 & 12 & 21 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $cond_\infty(A)$.
2. Supposons que $Ax = b$ et $A\widetilde{x} = \widetilde{b}$ avec $\|b\|_\infty = 1$ et $\left\|b - \widetilde{b}\right\|_\infty = 10^{-7}$. Donner la borne de l'erreur relative de la solution $\dfrac{\|x - \widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

Solution
1. On sait que

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty$$

et

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

alors

$$\|A\|_\infty = \max(5, 8, 8, 10) = 10$$

et

$$\|A\|_\infty = \frac{1}{2} \max(4, 18, 33, 49) = \frac{49}{2}$$

donc

$$cond_\infty(A) = \frac{490}{2} = 245.$$

2. On a, puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme matricielle subordonnée alors

$$Ax = b \Longrightarrow \|b\|_\infty = \|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$$

alors

$$\frac{1}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \frac{1}{\|b\|_\infty}. \tag{1}$$

d'autre part, puisque A est inversible

$$\left\{\begin{array}{l} Ax = b \\ A\widetilde{x} = \widetilde{b} \end{array}\right. \Longrightarrow A\left(x - \widetilde{x}\right) = b - \widetilde{b} \Longleftrightarrow x - \widetilde{x} = A^{-1}\left(b - \widetilde{b}\right)$$

ce qui implique

$$\|x - \widetilde{x}\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|b - \widetilde{b}\right\|_\infty \tag{2}$$

A partir des inégalités (1) et (2) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\|x - \widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\leq cond_\infty\left(A\right) \frac{\left\|b - \widetilde{b}\right\|_\infty}{\|b\|_\infty} \\ &\leq 245 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice d'itération B_{GS} de l'algorithme de Gauss-Seidel.
2. Calculer $\sqrt{\rho\left(B_{GS}^T B_{GS}\right)}$ Qu'en déduisez vous sur la convergence de l'algorithme de Gauss-Seidel?

Solution
1. On pose

$$A = D - E - F$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'itération de Gauss-Seidel est

$$\begin{aligned} B_{GS} &= \left(D - E\right)^{-1} F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$B_{GS}^T B_{GS} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $B_{GS}^T B_{GS}$ sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. ce qui implique que $\rho\left(B_{GS}^T B_{GS}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{\rho\left(B_{GS}^T B_{GS}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Comme

$$\|B_{GS}\|_2 = \sqrt{\rho\left(B_{GS}^T B_{GS}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Exercice 4 (7 points)

$$(P):\begin{cases} y'(t) = -2ty(t) & t\in[0,1] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

1. Montrer que le problème (P) admet une solution unique puis calculer explicitement cette solution.
2. Utiliser une itération de la méthode de Taylor d'ordre 2 pour appocher la solution du problème (P) avec un pas $h=0.1$.
3. Définir l'erreur de troncature locale lorsque la méthode de Taylor d'ordre 2 est appliquée à ce problème. Déduire une borne supérieure pour l'erreur de troncature.
4. Si la méthode d'Euler est utilisée pour résoudre ce problème et qu'une précision de 10^{-4} est souhaitée pour la valeur finale $y(1)$, quelle valeur faut-il utiliser pour le pas h?

On donne les majorations: $|y''(t)|\leq 2$ et $\left|y^{(3)}(t)\right|<4$ pour tout $t\in[0,1]$.

Solution

1. On pose

$$\begin{aligned} f:[0,1]\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,y) &\longmapsto f(t,y)=-2ty \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ et lipschitzienne de constante $L=2$, puisque pour tout $t\in[0,1]$ et pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^2$ on:

$$|f(t,y)-f(t,z)| = 2t|y-z| \leq 2|y-z|.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (P) admet une solution unique.
L'équation différentielle de (P) est une equation à variables séparables qui s'écrit

$$\frac{dy}{y} = -2tdt$$

en intégrant on obtient

$$\ln|y| = -t^2+c$$

ce qui implique

$$y(t) = \pm e^{-t^2+c} = Ke^{-t^2}.$$

La condition initiale permet de déterminer $K=1$.
La solution du problème de Cauchy est

$$y(t)=e^{-t^2}.$$

2. Le développement de Taylor autour de t_n s'écrit

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+y'(t_n)h+y''(t_n)\frac{h^2}{2}+y'''(\xi_n)\frac{h^3}{3!},\qquad t_n<\xi_n<t_{n+1}.$$

Or

$$y'(t) = -2ty(t)$$

et

$$\begin{aligned} y''(t) &= -2y(t) - 2ty'(t) \\ &= -2y(t) - 2t(-2ty(t)) \\ &= 2y(t)\left(2t^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Alors la formule de Taylor d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - 2ht_ny_n + h^2\left(2t_n^2 - 1\right)y_n \\ &= \left(1 - 2ht_n + h^2\left(2t_n^2 - 1\right)\right)y_n \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = 1 \\ y(0.1) &\approx y_1 = (1 - 0.01) \times 1 = 0.99. \end{aligned}$$

3. L'erreur de troncature est donnée par

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\, f(t_n, y(t_n))\right),$$

De même la formule de Taylor implique

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h^2}{3!}y'''(\xi_n)$$

et donc en utilisant l'indication

$$\begin{aligned} |\tau_{n+1}(h)| &< 4\frac{h^2}{3!} \\ &< 6.6667 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. L'erreur globale de la méthode d'Euler au point t_n est bornée comme suit

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right),$$

avec $M = \max_{t\in[0,1]} |y''(t)| = 2$.
Donc

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{h}{2}\left(e^2 - 1\right) \leq 10^{-4},$$

implique

$$h \leq \frac{2}{e^2 - 1}10^{-4}.$$