Rattrapage Algèbre 4 21-06-2022
Département de Maths. Faculté des Sciences
UABB - Tlemcen

Exercice1 : Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice associée à une certaine forme quadratique Q définie dans $\mathbb{R}^3$.

1- Déterminer le noyau de Q.
2- Q est-elle définie ? Justifier.
3- Soit W le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (0,0,1).

Déterminer une base de l'orthogonal de W pour Q.

4- Quel est le signe de Q?

Exercice2 : A- On note par $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ une forme bilinéaire.

1- Dire si φ est symétrique ou pas (justifier) puis déterminer son rang.
2- Dire si φ est dégénérée ou pas (justifier) puis déterminer son cône isotrope.

B- Dans $\mathbb{R}^4$ on considère la forme quadratique q définie par :

$$q(x, y, z, t) = xy + xz - xt + yz + yt$$

1- Décomposer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2- Donner un exemple de vecteur v de $\mathbb{R}^4$ non nul tel que q(v)=0.

Exercice3 : Soit $s = (1, 3, 5)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, espace euclidien muni du produit scalaire canonique, et soit K un plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $t = (1, 3, -2)$ et $r = (5, 1, 4)$.

1- La famille (t, r) est-elle une base du sous espace K ?
2- On veut ortho-normaliser (t, r). Comment procéder ?
3- Soit $\check{s}$ le projeté orthogonal du vecteur s sur K. Déterminer les composantes de $\check{s}$.
4- Enoncer un résultat d'existence et d'unicité de $\check{s}$ dans K vérifiant
   q = s - $\check{s}$, où q ∈ $K^{\perp}$, puis déterminer q.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم

UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire ..... السنة الدراسية Nom ..... اللقب

Examen ..... الإختبار Prénom ..... الإسم

Date ..... التاريخ Né (e) le ..... تاريخ الإزدياد

Signature de l'Etudiant ..... إمضاء الطالب N° Carte d'Etudiant ..... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

Corrigé Rattrapage Algèbre 4 21-06-22

Exo1 (8,5 pts)

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 1) $Ker(Q) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$

1 On résout $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x - 4y - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ -6y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

1 $Ker(Q) = Vect(2, 1, -3)$

2) Q n'est pas définie car $Q(2,1,-3) = 0$ et

1 $(2,1,-3) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

3) $W = \text{vect}(0,0,1)$

Selon M, la forme polaire φ_Q est :

$\varphi_Q((x,y,z),(x',y',z'))$

0,5 $= xx' - \frac{1}{2}(xy' + x'y) + \frac{1}{2}(xz' + x'z) - 2yy'$

$- (yz' + y'z)$

1 $W^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \varphi_Q((x,y,z),(0,0,1)) = 0\}$

$\varphi_Q((x,y,z),(0,0,1)) = 0$

0,5 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - y = 0$

1 Donc $W^{\perp} = \text{vect}((0,0,1),(2,1,0))$

4) Signe de Q : Critère de Sylvester :

les mineurs principaux :

0,5 $\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$ On a $\Delta_1 \geq 0$

0,5 $\Delta_3 = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. et $\Delta_2, \Delta_3 \leq 0$

0,5

Donc Q change de signe.

EXO2 A) Dans $\mathbb{R}^2$, (e_1, e_2) la base canonique :
(6,5pt) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

1) La matrice associée à φ est $M_{(e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

0,5 $M_{(e_1,e_2)}(\varphi)$ est symétrique donc φ est symétrique

0,5 les 2 vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont libres

donc $rg\, M_{(e_1,e_2)}(\varphi) = rg(\varphi) = 2$

2) le fait que $rg(\varphi) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc $Ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

0,5 donc φ est non dégénérée

Soit q la forme quadratique associée à φ

le cône des vecteurs isotropes de q est :

0,5 $\longrightarrow$ $C(q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x_1, x_2) = 0\}$

$q(x_1, x_2) = q(x) = \varphi(x, x) = x_1^2 - x_2^2 = 0$

A_1 2,5

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$

D'où $C(q) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

B) Dans $\mathbb{R}^4$:

$$q(x, y, z, t) = xy + xz - xt + yz + yt$$

1) La réduction de Gauss conduit à :

3pt $q(x, y, z, t) = l_1^2(x, y, z, t) - l_2^2(x, y, z, t) + l_3^2(x, y, z, t) + l_4^2(x, y, z, t)$

0,75 + 3pt

avec : $l_1(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x + y + 2z)$, $l_2(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x - y + 2t)$

$l_3(x, y, z, t) = z$, $l_4(x, y, z, t) = t$.

0,25 4) Soit $v = \overset{\text{exemple}}{(0,0,0,5)} \neq (0,0,0,0)$

On a bien $q(0,0,0,5) = 0$

Il en est de même pour tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

EXO3 (5 pts) $s = (1,3,5)$, $t = (1,3,-2)$, $r = (5,1,4)$

1) $K = \text{vect}(t,r)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$, le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$

donc (t,r) est libre

0,50 • (t,r) est une base de K.

2) On remarque que $\langle t,r \rangle = 1(5) + 3(1) - 2(4) = 0$

donc $t \perp r$

• (t,r) est donc une base orthogonale.

0,5 Pour qu'elle soit normale (ou normée), alors:

$$t' = \frac{t}{\|t\|} = \frac{1}{\sqrt{1+9+4}}(1,3,-2) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)$$

0,5

$$r' = \frac{r}{\|r\|} = \frac{1}{\sqrt{25+1+16}}(5,1,4) = \frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)$$

• (t',r') est une base orthonormale.

3) $\check{s} = \text{proj}_t(s) + \text{proj}_r(s)$

0,5 + 0,5 $$= \frac{\langle s,t \rangle t}{\langle t,t \rangle} + \frac{\langle s,r \rangle r}{\langle r,r \rangle} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{9}{3}\right)$$

2 4) D'après le corollaire 6 (p.9 / chap 2): Tout $x \in \mathbb{R}^3$, s'écrit de manière unique : $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K$ et $x_2 \in K^\perp$.

+0,5 D'où $s = \check{s} + q \Leftrightarrow q = s - \check{s} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

FIN