

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.  
Module : *Analyse 4* - Examen final.  
Jeudi 09/06/2022 - Durée : 01h30mn.  
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

**Exercice 1 :** (05pts) On considère une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

1. Rappeler l'expression de  $J_f(x, y)$ , la matrice jacobienne de  $f$  au point  $(x, y)$ .
2. Trouver toutes les fonctions  $f$  pour lesquelles  $J_f$  est une matrice constante i.e,

$$J_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Parmi les solutions  $f$ , lesquelles sont bijectives ? (Justifier)

**Exercice 2 :** (08pts) On définit une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$g(x, y) = 6x^2y^3 - 2x^3y^3 - 3x^2y^4$$

1. Déterminer tous les point critiques de  $g$ .
2. Préciser ensuite la nature de chaque point critique (dégénéré ou non, maximum local, minimum local ou bien point selle).

**Exercice 3 :** (07pts) Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_{\mathcal{E}} (x^2 - y^2) \, dx dy$$

où  $\mathcal{E}$  est l'ellipse définie par

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avec  $a > b > 0$ . (Indication : penser à adapter les coordonnées polaires)

Exercice 1: (6.5pts)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

1/ On a  $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$

1pt

2/ Pour avoir  $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  (matrice constante)

on doit résoudre le système  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = a, & \frac{\partial u}{\partial y} = b \\ \frac{\partial v}{\partial x} = c, & \frac{\partial v}{\partial y} = d \end{cases}$

Commençons par la 1<sup>ère</sup> équation:  $\frac{\partial u}{\partial x} = a$ , alors

$u(x, y) = ax + U(y)$  en prenant la primitive en  $x$ ,

$U(y)$  est une "constante" en  $x$ . Alors  $\frac{\partial u}{\partial y} = U'(y) = b$

donc  $U(y) = by + k_1$ . Donc  $u(x, y) = ax + by + k_1$

De la même façon on obtient:  $v(x, y) = cx + dy + k_2$

avec  $k_1, k_2$  deux constantes arbitraires.

3/ D'après le théorème de l'inversion locale,  $f$  sera localement inversible si  $J_f(x_0, y_0)$  est inversible, c'est-à-dire  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  inversible. Ceci aura lieu si et si le déterminant

est différent de 0:  $ad - bc \neq 0$ . Comme cela ne dépend pas du point  $(x_0, y_0)$ , alors l'inversibilité est globale. Donc  $f(x, y) = (ax + by + k_1, cx + dy + k_2)$

est bijective sur  $\mathbb{R}^2$  si:  $ad - bc \neq 0$ .

2pts

2pts

1

Exercice 2: (08 pts)

$$g(x,y) = 6x^2y^3 - 2x^3y^3 - 3x^2y^4$$

1° Les points critiques: on résout  $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2y^3 - 6x^3y^3 - 6xy^4 = 0 \\ 18x^2y^2 - 6x^3y^2 - 12x^2y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6xy^3(2-x-y) = 0 \\ 6x^2y^2(3-x-2y) = 0 \end{cases}$$

\* Si  $x=0$ ,  $y$  q.cq: on a une solution

\* Si  $y=0$ ,  $x$  q.cq: on a une autre solution.

\* Si  $x \neq 0, y \neq 0$  alors  $\begin{cases} 2-x-y=0 \\ 3-x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Les points critiques sont donc:  $A_x = (x,0)$ ;  $B_y = (0,y)$  et  $C = (1,1)$  3pts

2° Nature des points critiques:

Le calcul de la Hessienne donne:  $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6y^3(2-2x-y) & 6xy^2(6-3x-4y) \\ 6xy^2(6-3x-4y) & 12x^2y(3-x-3y) \end{pmatrix}$

\* Pour  $A_x$ :  $H_g(A_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , point dégénéré 1pt

\* Pour  $B_y$ :  $H_g(B_y) = \begin{pmatrix} 6y^3(2-y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , point dégénéré. 1pt

\* Pour  $C$ :  $H_g(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ , point non-dégénéré 2pts

$\det H_g(C) = \lambda_1 \lambda_2 = 72 - 36 = 36 > 0$  (les v. propres ont même signe)

$\text{tr}(H_g(C)) = \lambda_1 + \lambda_2 = -18$  (les v. p.  $< 0$ ). C'est un maximum

2



Exercice 3: (07pts)  $a > b > 0$ .

$$I = \iint_E (x^2 - y^2) dx dy, \quad E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

On fait le changement de variable  $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$   
avec  $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$ ,  $J = \begin{pmatrix} ar \cos \theta & -ar \sin \theta \\ br \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix}$

et  $\det J = abr$ . Mon

$$\begin{aligned} I &= ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= ab \left( \int_0^1 r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{ab}{4} \int_0^{2\pi} \left[ a^2 \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) - b^2 \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \left[ (a^2 - b^2) \theta + (a^2 + b^2) \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2)}$$



2pts

1pt

4pts

3