Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2021/2022)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L2)
Examen du module Probabilités (1h30)
(Aucun documents ni calculatrice n'est autorisé)

<u>Exercice N°1</u>(09pts)

I] la v.a.r X suit une loi de Weibull $W(\alpha, \beta)$, si sa densité est égale a:

$$f(x) = \alpha\beta.x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha x^{\beta}} \cdot 1_{[0;+\infty[}(x) \quad \text{et } \alpha, \beta > 0$$

1. Verifier que f est bien une fonction de densité (2.5pts)
2. Déterminer F, la fonction de répartition de la v.a.r X (2.5pts)
3. On suppose que X modélise la durée de vie d'un composant électronique. On appelle taux de panne de X la fonction :
$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad pour\ x > 0$$
   - Expliciter $h(x)$. (1pt)

II] La fonction de densité de la loi de Cauchy notée $C(1)$ est:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)} \qquad x \in \mathbb{R}^*$$

On pose Y=1/X, montrer que Y suit une loi de Cauchy $C(1)$ dans $\mathbb{R}^*$ (3pts)

<u>Exercice N°2</u> (11pts)

I] Soient (X,Y) et (U,V) deux couples aléatoires de densités respectives:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(1 + xy\right) & si \quad (x,y) \in [-1;1]^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(u,v) = \frac{1}{4} \cdot 1_{[-1;1]^2}(u,v)$$

1. Déterminer les densités marginales de (X,Y) et (U,V) ie: $f_X,\ f_Y,\ g_U,\ g_V.(3.5pts)$
2. Que remarquez vous concernant les lois marginales Xet U, Yet V .Quelle conclusion peut-on dire sur les lois des couples (1pts)
3. Calculer $P(A) = P(|X| \leq Y)$ (2pts)
4. On pose T=X+Y, déterminer la loi de T. (2.5pts)

II] Soit (X,Y) un vecteur gaussien centrée tel que E(X^2)=4 et E(Y^2)=1. On suppose de plus que 2X+Y et X-3Y sont indépendantes.

1. Que vaut la covariance cov(2X+Y, X-3Y). (0.5pt)
2. En déduire la covariance cov(X,Y). (1.5pts)

Solution

Exercice N°1

I]
1)

$$f\ densité \iff \left\{\begin{array}{ll} f(x)\geq 0 & \forall x\ (vraie) \\ et & \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1 & \end{array}\right. \quad (0.5pt)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha,\beta>0 & x>0 & \exp y>0 & (0.5pt) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx & = \int_0^{\infty} \alpha\beta.x^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha x^{\beta}}\ dx & =1? & (0.5pt) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \alpha\beta.x^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha x^{\beta}}\ dx &= \left[-e^{-\alpha x^{\beta}}\right]_0^{+\infty} \\ &= -0+e^0 = 1 CQFD \qquad (1pt)\end{aligned}$$

2) la fonction de répartition F
Si x<0, $F(X)=P(X\leq x)=0 \quad (1pt)$
Si x≥0, $F(X)=P(X\leq x)=\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x \alpha\beta.t^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha t^{\beta}}\ dt = \left[-e^{-\alpha t^{\beta}}\right]_0^x = 1-e^{-\alpha x^{\beta}}\ (1pt)$

conclusion

$$F(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & si\ x<0 \\ 1-e^{-\alpha x^{\beta}} & si\ x\geq 0 \end{array}\right. \ (0.5pt)$$

3)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{1-F(x)}\ \ pour\ x>0 \\ &= \frac{\alpha\beta.x^{\beta-1}\cdot e^{-\alpha x^{\beta}}}{e^{-\alpha x^{\beta}}} \\ &= \alpha\beta.x^{\beta-1} \qquad (1pt) \end{aligned}$$

II] le support si X> 0 alors Y=1/X>0 donc $D_Y =]0,+\infty[\ \ (0.5pt)$

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \iff y=\frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow x=\varphi^{-1}(y) \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

$$\left(\varphi^{-1}(y)\right)' = \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{-1}{y^2} \qquad (0.5pt)$$

Selon le théorème (vu en cours)

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(\varphi^{-1}(y)) \times \left|\left(\varphi^{-1}(y)\right)'\right| \quad pour\ y \in D_Y \qquad (0.5pt) \\
&= f_X(\frac{1}{y})) \times \left|\frac{-1}{y^2}\right| \quad pour\ y \in]0,+\infty[\\
&= \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \times \frac{1}{y^2} \qquad pour\ y \in \mathbb{R}_+^* \ (0.5pt) \\
&= \frac{1}{\pi\left(y^2+1\right)} \quad CQDF \qquad (0.5pt)
\end{aligned}$$

Donc Y reste une loi de cauchy de paramètre 1 sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice N°2

I]

1) lois marginales

Remarquons d'abord que $D_X = D_Y = [-1;1] \quad et \quad que\ D_U = D_V = [-1;1]$, $(0.5pt)$ de plus la densité f est symétrique $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(X,Y)}(y,x)$, il suffira de faire les calculs pour une seule variable.$(1pt)$

Pour calculer la loi de X il suffit d'intégrer la densité jointe par rapport à sa seconde variable :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)\ dy \qquad avec\ x \in [-1;1] \\
&= \frac{1}{4}\left[y+\frac{1}{2}xy^2\right]_{-1}^{1} \qquad avec\ x \in [-1;1] \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x\right) \qquad avec\ x \in [-1;1] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1_{[-1;1]}(x)
\end{aligned}$$

donc $f_Y(y) = f_X(x) = \frac{1}{2}\cdot 1_{[-1;1]}(y) \quad (1pt)$

$$\begin{aligned}
g(u,v) &= \frac{1}{4}\cdot 1_{[-1;1]^2}(u,v) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1_{[-1;1]}(u) \times \frac{1}{2}\cdot 1_{[-1;1]}(v) \\
&= g_U(u) \times g_V(v)
\end{aligned}$$

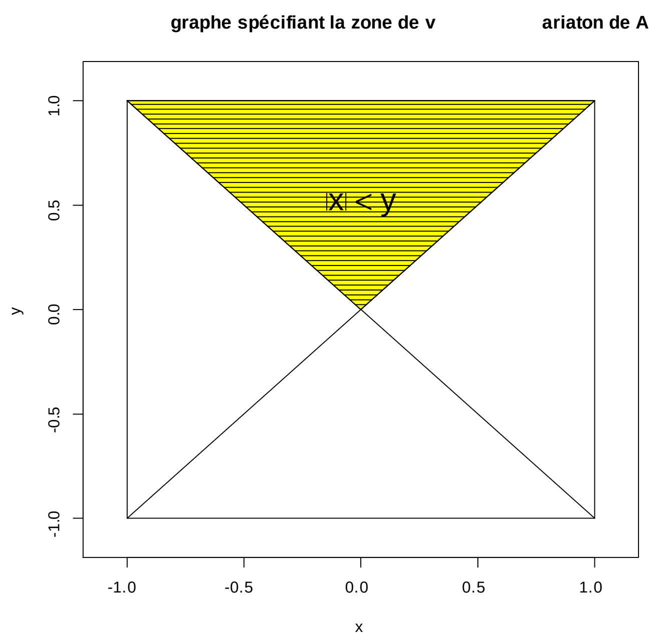
les variables U et V, ainsi définie, sont des lois uniformes sur $[-1,1] \quad (1pts)$

2) Finalement, on remarque que $f_X = f_Y = g_U = g_V$ toutes les variables sont identiquement distribuées et suivent une loi uniforme sur $[-1;1]$.Cependant, $f_{(X,Y)} \neq g_{(U,V)}$ et donc les couples (X,Y) et (U,V) ne sont pas identiquement distribuées.

Ceci montre un point important, de la loi du couple: ie nous pouvons toujours déduire les lois marginales ; par contre, les lois marginales ne suffisent pas en général à calculer la loi du couple. $(1pt)$

3)Calculer $P(A) = P(|X| \leq Y)$

$$
\begin{aligned}
P(|X| &\leq Y) = \int_0^1 \int_{-y}^{y} \frac{1}{4}(1+xy) \cdot dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[x + \frac{1}{2}yx^2\right]_{-y}^{y} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(y + \frac{1}{2}y^3 - (-y) - \frac{1}{2}y^3\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 ydy \\
&= \left[\frac{1}{4}y^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$



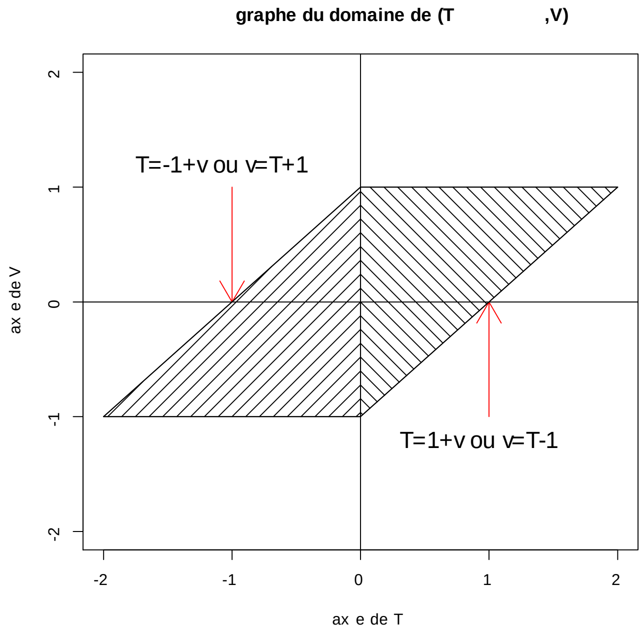
ou bien il suffit de remarquer que $P(\Omega) = 4P(A) \Longrightarrow P(A) = 1/4, \quad car\ P(\Omega) = 1$

4) On pose T=X+Y, déterminer la loi de T

On pose $\begin{cases} T = X + Y \\ V = Y \end{cases}$

Domaine de variation, facilement on pourra voir que $-2 \leq T \leq 2$, mais précisement on aura:

$$
\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1 \leq T - y \leq 1\ ie\ \ -1 \leq T - v \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}
$$
$$
\Longrightarrow \begin{cases} -1 + v \leq T \leq 1 + v \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases} \quad (1pt)
$$



selon la formule du cours, on aura: (sinon on recalcul le jacobien de la transformation...):

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(t-v,v)\cdot dv \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \int_{-1}^{1+t} \frac{1}{4}\left(1+(t-v)v\right)\cdot dv & si \ -2 \le t \le 0 \\ \int_{t-1}^{1} \frac{1}{4}\left(1+(t-v)v\right)\cdot dv & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \quad (0.5pt) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \int_{-1}^{1+t} \frac{1}{4}\left(1+tv-v^2\right)\cdot dv & si \ -2 \le t \le 0 \\ \int_{t-1}^{1} \frac{1}{4}\left(1+tv-v^2\right)\cdot dv & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{1}{4}\left(v+\frac{t}{2}v^2+\frac{1}{3}v^3\right)\right]_{-1}^{t+1} & si \ -2 \le t \le 0 \\ \left[\frac{1}{4}\left(v+\frac{t}{2}v^2+\frac{1}{3}v^3\right)\right]_{t-1}^{1} & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}\left[\left(t+1+\frac{t}{2}(t+1)^2+\frac{1}{3}(t+1)^3+1-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]_{-1}^{t+1} & si \ -2 \le t \le 0 \\ \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{t}{2}+\frac{1}{3}-t+1-\frac{t}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}(t-1)^3\right)\right]_{t-1}^{1} & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}\left(t+1+\frac{t}{2}(t+1)^2+\frac{1}{3}(t+1)^3+1-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\right) & si \ -2 \le t \le 0 \\ \frac{1}{4}\left(1+\frac{t}{2}+\frac{1}{3}-t+1-\frac{t}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}(t-1)^3\right) & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2t+2t^2+\frac{5}{6}t^3\right) & si \ -2 \le t \le 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-2t+2t^2-\frac{5}{6}t^3\right) & si \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{array} \right. \quad (1pt)
\end{aligned}
$$

II]
1)les v.a.r 2X+Y et X-3Y sont **indépendantes** donc $cov(2X+Y;X-3Y)=0 \quad (0.5pt)$

2) <u>méthode1</u>: le devloppement

$$\begin{aligned}
0 &= cov(2X+Y;X-3Y) = 2cov(x,x) + cov(2x;-3y) + cov(y,x) - 3cov(y,y) \\
&= 2V(X) - 6cov(X;Y) + cov(X;Y) - 3V(Y) \\
&= 2E(X^2) - 5cov(X,Y) - 3E(Y^2) \quad (1pt)
\end{aligned}$$

$$cov(X,Y) = \frac{-3E(Y^2) + 2E(X^2)}{5} = \frac{-3+8}{5} = 1 \quad (0.5pt)$$

<u>méthode 2</u>

$$cov(2X+Y;X-3Y) = 0 \Leftrightarrow E((2X+Y)(X-3Y)) = E(2X+Y) \times E(X-3Y) = 0 \;\; centrée \; (0.5pt)$$

$$\begin{aligned}
E((2X+Y)(X-3Y)) &= E(2X^2 - 6XY + YX - 3Y^2) = 2E(X^2) - 5E(XY) - 3E(Y^2) \\
&= -5 - 5E(XY)
\end{aligned}$$

$$donc \; E(XY) = 1 \; (0.5pt)$$

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\
&= 1 - 0 \times 0 = 1 \quad (0.5pt)
\end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned}
E(aX+bY) &= aE(X) + bE(Y) \\
&= 0 \;\; si \; X \; et \; Y \; centrée
\end{aligned}$$