Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

2ème année Mathématiques
Semestre 2

Examen final de Géométrie
07 Juin 2022- Durée 1h 30mn

Exercice 1 (5 pts)

Calculer la courbure de la courbe paramétrée $\alpha :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\alpha(t) = \left(R\Big(\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \cos(t)\Big), R\sin(t) \right)$$

où R est un réel strictement positif donné.

Exercice 2 (7 pts)

Soit S l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$\begin{cases} (x, z) \neq (0, 0) \\ xy - z^3 = 0 \end{cases}$$

1. Donner un paramétrage de S.
2. Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(1, 8, 2)$.
3. Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(1, 8, 2)$.
4. Le vecteur $V = (7, -18, 3)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(1, 8, 2)$?
5. Calculer, en un point p de la surface S, la première forme fondamentale.

Exercice 3 (8 pts)

Soit H le paraboloïde hyperbolique paramétré par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(u, v) = (a(u + v), b(u - v), uv)$$

où a et b sont des réels non nuls.

1. Déterminer les points réguliers de H.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier p de H.
3. On pose $a = b = 1$, calculer la courbure de Gauss de la surface H en un point régulier p.

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

2ème année Mathématiques
Semestre 2

Épreuve finale de Géométrie
07 Mai 2022
Le Corrigé

Exercice 1 (5 pts)

On donne la courbe plane paramétrée par

$$\alpha(t) = \left(R\Big(\ln\Big(\tan\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big) + \cos(t)\Big), R\sin(t)\right)$$

avec $t \in]0, \pi[$.

Calculer la courbure de α.

α est bien de classe C^2 sur $]0, \pi[$ dont la courbure est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{|\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

or $\alpha'(t) = R\left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t), \cos(t)\right)$ **(1pt)** et $\alpha''(t) = R\left(-\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} - \cos(t), -\sin(t)\right)$ **(1pt)**

Ce qui donne

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = R^2\left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 \quad \textbf{(1pt)}$$

d'autre part $\|\alpha'(t)\|^3 = R^3\frac{|\cos(t)|^3}{\sin(t)}$ (comme $t \in]0, \pi]$, alors $\sin t > 0$) **(1pt)**. Par conséquent

$$\kappa(t) = \frac{1}{R}|\tan(t)| \quad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 2 (7 pts)

Soit S l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$\begin{cases} (x, z) \neq (0, 0) \\ xy - z^3 = 0 \end{cases}$$

1. *Donner un paramétrage de* S. **(1pt)**
   Considérons la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

   $$\varphi(u, v) = (u, \frac{v^3}{u}, v)$$

   Le support de φ est contenu dans S . Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x, y, z) de S. Comme $x \neq 0$, $M = \varphi(x, z)$ et le support de φ est exactement S.
2. *Déterminer une base de l'espace tangent à la surface* S *en* $A(1, 8, 2)$.
   Calculons les dérivées partielles de φ.

   $$\varphi_u = \left(1, -\frac{v^3}{u^2}, 0\right) \quad \textbf{(0.5pt)} \quad \text{et } \varphi_v = \left(0, \frac{3v^2}{u}, 1\right) \quad \textbf{(0.5pt)}$$

   Le point A est obtenu au point de paramètre $(u, v) = (1, 2)$. Donc $\varphi_u(1, 2) = (1, -8, 0)$ et $\varphi_v(1, 2) = (0, 12, 1)$. Ces deux vecteurs forment une base du plan tangent T_AS à S au point de paramètre $(u, v) = (1, 2)$ **(1pt)**.

3. *Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(1,8,2)$.*
   On a $N(u,v) = \varphi_u \wedge \varphi_v = \left(-\frac{v^3}{u^2}, -1, 3\frac{v^2}{u}\right)$ **(1pt)**. D'où $N(1,2) = (-8,-1,12)$ **(0.5pt)**.
4. *Le vecteur $V = (7,-18,3)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(1,8,2)$?*
   On a $N.V = -56 + 18 + 36 = -2 \neq 0$. Donc $V \notin T_A S$ **(0.5pt)**.
5. *Calculer, en un point p de la surface S, la première forme fondamentale.*
   Soit $p = \varphi(u,v) \in S$, le plan tangent au point p est engendré par $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ où

$$\varphi_u = \left(1, -\frac{v^3}{u^2}, 0\right) \text{ et } \varphi_v = \left(0, \frac{3v^2}{u}, 1\right)$$

   La première forme fondamentale I_p de S est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.
   On calcule $E = \varphi_u.\varphi_u = 1 + \frac{v^6}{u^4}$, $F = \varphi_u.\varphi_v = -3\frac{v^5}{u^3}$ et $G = \varphi_v.\varphi_v = 1 + 9\frac{v^4}{u^2}$ **(1.5pt)**.
   Donc

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^6}{u^4} & -3\frac{v^5}{u^3} \\ -3\frac{v^5}{u^3} & 1 + 9\frac{v^4}{u^2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Exercice 3 (8 pts)

Soit H le paraboloïde hyperbolique paramétré par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(u,v) = (a(u+v), b(u-v), uv)$$

où a et b sont des réels non nuls.

1. *Déterminer les points réguliers de H.*
   Calculons les dérivées partielles de f

$$f_u = (a,b,v) \text{ et } f_v = (a,-b,u) \quad \textbf{(0.5pt)}$$

   ainsi que leurs produit vectoriel $f_u \wedge f_v = (b(u+v), -a(u-v), -2ab)$ **(0.5pt)**. Comme $ab \neq 0$, ce vecteur $f_u \wedge f_v$ ne peut pas s'annuler. Tout les points de H sont, donc, réguliers. **(0.5pt)**
2. *Déterminer une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier p de H.*
   Le plan tangent à H au point p est engendré par les vecteurs f_u et f_v, c'est l'ensemble des points $m = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{pm}$ soit colinéaire à f_u et f_v. C-à-d, ils existent deux réels α et β tels que $\overrightarrow{pm} = \alpha f_u + \beta f_v$ **(0.5pt)**. Ce qui donne

$$\textbf{(0.75pt)} \quad \begin{cases} x - a(u+v) = (\alpha+\beta)a & ...(1) \\ y - b(u-v) = (\alpha-\beta)b & ...(2) \\ z - uv = \alpha u + \beta v & ...(3) \end{cases}$$

   La première équation nous donne ; $\beta = \frac{x}{a} - u - v - \alpha$. On remplace dans la deuxième, on obtient $\alpha = \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - u$. En suite (2) implique ; $\beta = \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} - v$.
   Finalement, le report de α et β dans (3) nous donne l'équation cartésienne du plan tangent en p :

$$\frac{1}{2a}(u+v)x - \frac{1}{2b}(u-v)y - z - uv = 0 \quad \textbf{(0.75pt)}$$

3. *On pose $a = b = 1$, calculer la courbure de Gauss de la surface H en un point régulier p.*

La première forme fondamentale I_p de H est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

On a $f_u = (1, 1, v)$ et $f_v = (1, -1, u)$. D'où $E = 2 + v^2$, $F = uv$ et $G = 2 + u^2$. Donc

$$I_p = \begin{pmatrix} 2 + v^2 & uv \\ uv & 2 + u^2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.75pt)}$$

de déterminant : $\det I_p = 4 + 2u^2 + 2v^2$.

Le vecteur normal unitaire est donné par

$$N_p(u, v) = \frac{f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)\|}$$

En reprenant les formules ci-dessus, on a : $f_u \wedge f_v = (u + v, -u + v, -2)$, de norme

$$\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}$$

donc

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}} (u + v, v - u, -2) \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Calculons en suite :

$$f_{uu} = (0, 0, 0), \ f_{uv} = (0, 0, 1) \ \text{ et } \ f_{vv} = (0, 0, 0) \quad \textbf{(0.75pt)}$$

La deuxième forme fondamentale :

$$l = f_{uu}.N_p = 0, \quad m = f_{uv}.N_p = \frac{-2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}}, \quad q = f_{vv}.N_p = 0. \quad \textbf{(0.75pt)}$$

d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associée à l'opérateur de forme est $S_p = I_p^{-1} II_p$. Ce qui donne

$$S_p = \frac{1}{4 + 2u^2 + 2v^2} \begin{pmatrix} 2 + u^2 & -uv \\ -uv & 2 + v^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Par suite

$$S_p = \frac{1}{(4 + 2u^2 + 2v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2uv & -4 - 2u^2 \\ -4 - 2v^2 & 2uv \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \det S_p = \frac{4u^2v^2 - (4 + 2u^2)(4 + 2v^2)}{(4 + 2u^2 + 2v^2)^3} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Ou encore

$$K = \frac{-1}{(2 + u^2 + v^2)^2} \quad \textbf{(0.25pt)}$$