Examen Algèbre 4 -- 05 – 06 -22

Exo1 : Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1- La forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
2- En partant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit f-orthogonale.

Exo2 : Sur $\mathbb{R}_1[X]$ on pose $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1- Montrer que $(\mathbb{R}_1[X], <.,.>)$ est un espace euclidien.
2- On pose pour p = 0, 1, $L_p(X) = ((X^2-1)^p)^{(p)}$. (p ème dérivée de $((X^2-1)^p)$.
Montrer que $(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|})$ est l'ortho-normalisée de Schmidt de la base canonique (1, X).

Exo3 : Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique (usuel) <., .>.

On considère les vecteurs (2a, 2a, a) et le vecteur (1, -4, 1). a est un réel non nul.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ sur un plan vectoriel engendré par 2 des vecteurs précédents selon une droite vectorielle à déterminer.

Une fois la matrice déterminée, vérifiez qu'il s'agit bien d'un projecteur.

Corrigé de l'examen Algèbre 4 (05-06-22)

Exo 1 : (7,5 pts) 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

et $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

0,5 pt A est symétrique donc f est sym.

0,5 pt f est lin par rapport à x (ou à y) (simple à faire)

Critère de Sylvester : (mineurs principaux de A)

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 3, \quad \Delta_3 = 4$$

1 pt les 3 mineurs sont ≥ 0 donc $q(x) \geq 0$, $\forall x$

On déduit que la réduction de Gauss de q est la somme des carrés de 3 formes lin. indépendantes.

Réduction de Gauss nous donne :

1 pt $$q(x) = 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{4}{3}x_3^2$$

$q(x)$ est définie, en effet :

$$q(x) = 0 \iff \begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

D'où $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Conclu f forme bilin. sym, définie positive, donc f définit bien un produit scalaire.

2) Déterminons une base f-orthogonale en partant de (e_1, e_2, e_3) : Soit (u_1, u_2, u_3) cette base :

0,5 pt • $u_1 = e_1$, • $u_2 = e_2 + k u_1$

u_2 étant f-orthogonal à u_1 donc $f(e_2 + ku_1, u_1) = 0$

$$\Rightarrow f(e_2, u_1) + k f(u_1, u_1) = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{f(e_2, u_1)}{f(u_1, u_1)}$$

$f(e_2, u_1) = f((0,1,0), (1,0,0)) = -1$

$f(u_1, u_1) = f((1,0,0),(1,0,0)) = 2$

d'où $k = \frac{1}{2}$

2pts

Donc $u_2 = e_2 + \frac{1}{2} u_1 = (1/2, 1, 0)$

- $u_3 = e_3 + \lambda u_1 + \beta u_2$

u_3 étant f-orthogonal à u_1 et u_2, donc

$f(e_3 + \lambda u_1 + \beta u_2, u_1) = 0$

et $f(e_3 + \lambda u_1 + \beta u_2, u_2) = 0$

$\Rightarrow f(e_3, u_1) + \lambda f(u_1, u_1) = 0$ $(\beta f(u_2, u_1) = 0)$

et $f(e_3, u_2) + \beta f(u_2, u_2) = 0$ $(\lambda f(u_1, u_2) = 0)$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{f(e_3, u_1)}{f(u_1, u_1)} = 0$$

$$\text{et } \beta = -\frac{f(e_3, u_2)}{f(u_2, u_2)} = \frac{2}{3}$$

2pts

D'où $u_3 = \lambda u_1 + \beta u_2 + e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

Concl : La base cherchée est :

$B_f = \left\{u_1 = (1,0,0),\ u_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right),\ u_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right\}$

* On peut vérifier que :

$f(u_1, u_2) = f(u_1, u_3) = f(u_2, u_3) = 0$

Donc : (u_1, u_2, u_3) libre, et bien une base f-orthogonale.

Remarque Si $f(u_1, u_1) = f(u_2, u_2) = f(u_3, u_3) = 1$ alors (u_1, u_2, u_3) est une base f-orthonormale.

Exo 2 Sur $\mathbb{R}_1[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

07pts 1) $\mathbb{R}_1[X]$ est un espace Euclidien.

- $\mathbb{R}_1[X]$ est un e.v. c'est l'espace des polynômes de $d^\circ \leq 1$.
- $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$, P et $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ produit scalaire

0,5pt × $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est sym : $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$

× $\langle \cdot, Q\rangle$ est lin : On vérifie facilement que

0,5pt $\langle P_1 + \alpha P_2, Q\rangle = \langle P_1, Q\rangle + \alpha\langle P_2, Q\rangle$,

où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

× Positivité : Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geq 0$$

1pt (les bornes -1 et 1 sont dans le bon sens : c'est à dire on intègre du plus petit au plus grand)

× $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini : en effet

soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ P^2(t) = 0$$

1pt (en effet, fonct continue, positive, d'intégrale nulle)

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(t) = 0 \quad \forall t \in [-1,1]}$$

Cela veut dire que le poly P a une infinité de solutions

Donc le poly. P est identiquement nul

Concl : $(\mathbb{R}_1[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

2) $L_p(x) = \left((X^2-1)^p\right)^{(p)}$, $p = 0, 1$

0,5 + 0,5 $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = (X^2-1)' = 2X$

$(1, X)$ est bien la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$

0,5 $(L_0, L_1) = (1, 2X)$ est bien libre

On a bien : $\mathrm{Vect}(1, 2X) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$

$$\|L_0\|^2 = \langle L_0, L_0 \rangle = \int_{-1}^{1} dt = t\Big|_{-1}^{1} = 2$$

0,5 Donc $\|L_0\| = \sqrt{2}$.

$$\|L_1\|^2 = \langle L_1, L_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 4t^2\,dt = 4\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

0,5 Donc $\|L_1\| = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\langle L_0, L_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

0,5

$\Rightarrow$ L_0 est orthogonal à L_1

$\left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|}\right)$ est bien une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$

On vérifie bien que $\left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|}\right)$ <u>part bien de la base canonique</u> $(1, X)$ <u>et non pas d'une autre base</u> :

0,5 $L_0 = 1$, $\frac{L_0}{\|L_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{L_1}{\|L_1\|} = \frac{X + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}X\,dX}{\left\|X + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}X\,dX\right\|} = \frac{X + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}X\,dX}{\|X\|}$$

0,5

$$= \frac{X}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$\Rightarrow L_1(X) = 2X$

Exo3

(5,5 pts) Dans $\mathbb{R}^3$,

les vecteurs $(2a, 2a, a)$, $a \in \mathbb{R}$, sont colinéaires.

Prenons par exemple $a = 1$ et donc les 2 vecteurs $(2,2,1)$ et $(1,-4,1)$ sont libres et engendrent donc un plan W de $\mathbb{R}^3$.

0,5pt $W = \text{vect}\left((2,2,1), (1,-4,1)\right)$

Soit P_W la projection orthogonale d'un vect de $\mathbb{R}^3$ sur W selon une droite vectorielle D.

On a donc $D = W^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \,/\, w.(2,2,1) = 0$ et $w.(1,-4,1) = 0\}$

Soit $w = (x, y, z)$.

On résout le système $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 & (1) \\ x - 4y + z = 0 & (2) \end{cases}$

D'où $(1) \Leftrightarrow z = -2x - 2y$

et $(2) \Leftrightarrow x - 4y - 2x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -6y$

D'où $z = 10y$

Soit $(x, y, z) = (-6y, y, 10y)$

1,0pt $D = \text{vect}(-6, 1, 10)$.

Les vecteurs $(2,2,1)$ et $(1,-4,1)$ ne sont pas orthogonaux : $\langle (2,2,1), (1,-4,1) \rangle = 2 - 8 + 1 = -5 \neq 0$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Soient $u'_1 = (2,2,1)$ et $u'_2 = (1,-4,1)$

$$u_1 = \frac{u'_1}{\|u'_1\|} = \frac{1}{3}(2,2,1)$$

0,5pt

$$u_2 = \frac{u'_2 - \langle u'_2, u_1 \rangle u_1}{\|u'_2 - \langle u'_2, u_1 \rangle u_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{137}}(19, -26, 14)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^3$

$$P_W(x) = \sum_{i=1}^{2} \langle x, u_i \rangle u_i$$

1 pt $= \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant (e_1, e_2, e_3) :

On a donc

- $P_W(e_1) = \langle e_1, u_1 \rangle u_1 + \langle e_1, u_2 \rangle u_2$

$$= \frac{2}{9}(2,2,1) + \frac{19}{1233}(19,-26,14)$$

0,5 pt $$= \frac{1}{1233}(909, 54, 540)$$

- $P_W(e_2) = \langle e_2, u_1 \rangle u_1 + \langle e_2, u_2 \rangle u_2$

$$= \frac{2}{9}(2,2,1) - \frac{26}{1233}(19,-26,14)$$

0,5 pt $$= \frac{1}{1233}(54, 1224, -90)$$

- $P_W(e_3) = \langle e_3, u_1 \rangle u_1 + \langle e_3, u_2 \rangle u_2$

$$= \frac{1}{9}(2,2,1) + \frac{14}{1233}(19,-26,14)$$

0,5 pt $$= \frac{1}{1233}(540, -90, 333)$$

La matrice de P_W est : $M_{P_W} = \frac{1}{1233}\begin{pmatrix} 909 & 54 & 540 \\ 54 & 1224 & -90 \\ 540 & -90 & 333 \end{pmatrix}$

0,5 pt

Si on fait soigneusement les calculs, on trouve

0,5 pt $M_{P_W} \cdot M_{P_W} = M_{P_W} \Rightarrow P_W$ est bien un projecteur.

FIN