Faculté des Sciences 2021/2022
Département de Mathématiques
Durée: 90 mn **Examen final d'analyse numérique 2**

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 (6 points)
1. Utilisez le théorème de Gerschgorin pour localiser les valeurs propres de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. La matrice A peut-elle avoir des valeurs propres complexes ? Pourquoi?
3. Borner le rayon spectral de la matrice A.
4. Appliquez une étape de la méthode de puissance pour approcher la valeur propre dominante de A en normalisant avec la norme 2 et en prenant $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Proposer une méthode de la puissance appropriée pour trouver une approximation de la valeur propre de plus petit module puis de la valeur propre proche de -4.

Solution
1. **(1.5 points)**
Les disques de Gerschgorin selon les lignes sont:

$$D_1 = B(0,2), D_2 = B(-4,1) et D_3 = B(5,1)$$

Les disques de Gerschgorin selon les colonnes sont:

$$D_1' = B(0,1), D_2' = B(-4,2) et D_3' = D_3 = B(5,1).$$

Comme les disques de Gerschgorin sont deux à deux disjoints alors nous obtenons la localisation suivante du spectre: $\lambda_1 \in B(0,1), \lambda_2 \in B(-4,1)$ et $\lambda_3 \in B(5,1)$.
2. **(2 points)**
La matrice A ne peut pas avoir des valeurs propres complexes car si A admet une valeur propre complexe elle admettra aussi sa conjuguée comme valeur propre et donc appartient au même disque, ce qui est impossible puisque d'après la question 1. chaque disque contient une seule valeur propre.
3. **(0.5 point)**
D'après les questions précédentes $\lambda_1 \in [-1,1]\,, \lambda_2 \in [-5,-3]$ et $\lambda_3 \in [4,6]\,$, on déduit que

$$4 \leq \rho\,(A) = \max_i |\lambda_i| \leq 6.$$

4. **(2 points)**
Calcul de $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Normalisation

$$x^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Approximation de la valeur propre dominante

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \left\langle x^{(1)}, Ax^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{26} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{26} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{130}{26} = 5. \end{aligned}$$

5. **(1 point)**
Si λ est une valeur propre de A et si A^{-1} existe alors $1/\lambda$ est une valeur propre de A^{-1}. Pour obtenir la valeur propre de plus petit module on applique la méthode de la puissance à la matrice A^{-1}, on obtient $\mu = \frac{1}{\lambda_{\min}}$.
Comme $\lambda + 4$ est une valeur propre de $A - \mu I$. En supposant que $A - \mu I$ est inversible, en appliquant la méthode de la puissance à la matrice $(A - \mu I)^{-1}$ nous obtenons $\mu = \frac{1}{\lambda+4}$ avec λ la valeur propre de A proche de -4.

Exercice 2 (6 points)
Considérons la matrice de Householder $H = I - 2uu^T$ pour un vecteur u de norme $\|u\|_2 = 1$.
1. Prouver qu'une réflexion de Householder est symétrique et orthogonale.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$
3. Soit $x = (3, 0, -1, 2)^T$et $y = (-1, 0, 0, 0)^T$.Existe-t-il une matrice de Householder H telle que $Hx = y$? Expliquer.
4. Déterminer une factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution
1. **(1,5 points)**
On a

$$H = I - 2uu^T \Longrightarrow H^T = \left(I - 2uu^T\right)^T = I - 2uu^T.$$

Donc la matrice de Householder est symétrique.
De plus

$$\begin{aligned} HH^T &= \left(I - 2uu^T\right)\left(I - 2uu^T\right) \\ &= I - 2uu^T - 2uu^T + 4u\left(u^T u\right)u^T \\ &= I - 4uu^T + 4uu^T \quad \text{car} \quad u^T u = \|u\|_2^2 = 1 \\ &= I. \end{aligned}$$

Donc la matrice de Householder est orthogonale.

2. **(1 point)**

$$Hx = \left(I - 2uu^T\right)x = x - 2uu^Tx$$

$$\begin{aligned}
\|Hx\|_2^2 &= \left(x - 2uu^Tx\right)^T\left(x - 2uu^Tx\right) \\
&= x^Tx - 2\left(uu^Tx\right)^T x - 2x^Tuu^Tx + 4\left(uu^Tx\right)^T uu^Tx \\
&= \|x\|_2^2 - 2x^Tuu^Tx - 2x^Tuu^Tx + 4x^Tu\left(u^Tu\right)u^Tx \\
&= \|x\|_2^2 - 4x^Tuu^Tx + 4x^Tuu^Tx \\
&= \|x\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Sachant que la norme est toujours positive alors

$$\|Hx\|_2 = \|x\|_2 .$$

3. **(1.5 points)**
On remarque que

$$\|x\|_2 = \sqrt{14} \neq \|y\|_2 = 1.$$

D'après la question 2., il n'existe pas de matrice de Householder H telle que $Hx = y$.

4. **(2 points)**

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v\|_2^2 = 2$$

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
QA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$A = QR$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$R=\left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Exercice 3 (8 points)

On considère le problème

$$(P):\begin{cases} y'(t)=t+3\dfrac{y(t)}{t} & t\in[1,2]\\ y(1)=0 \end{cases}$$

1. Utiliser une itération de la méthode de Taylor d'ordre 2 pour appocher la solution du problème (P) avec un pas $h=0.1$.
2. Définir l'erreur de troncature locale lorsque la méthode de Taylor d'ordre 2 est appliquée à ce problème. Déduire une borne supérieure pour l'erreur de troncature.
3. Si la méthode d'Euler est utilisée pour résoudre ce problème et qu'une précision de 10^{-4} est souhaitée pour la valeur finale $y(2)$, quelle valeur faut-il utiliser pour le pas h?

Solution

1. **(2.5 points)**

Le développement de Taylor autour de t_n s'écrit

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+y'(t_n)h+y''(t_n)\frac{h^2}{2}+y'''(\xi_n)\frac{h^3}{3!},\qquad t_n<\xi_n<t_{n+1}.$$

Or

$$y'(t)=t+3\frac{y(t)}{t}$$

et

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt}\left(t+3\frac{y(t)}{t}\right)\\ &= 1+\frac{3}{t}y'(t)-3\frac{y(t)}{t^2}\\ &= 1+\frac{3}{t}\left(t+3\frac{y(t)}{t}\right)-3\frac{y(t)}{t^2}\\ &= 4+6\frac{y(t)}{t^2} \end{aligned}$$

alors la formule de Taylor d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n+h\left(t_n+3\frac{y_n}{t_n}\right)+\frac{h^2}{2}\left(4+6\frac{y_n}{t_n^2}\right)\\ &= y_n+h\left(t_n+3\frac{y_n}{t_n}\right)+h^2\left(2+3\frac{y_n}{t_n^2}\right)\\ &= \left(1+\frac{3}{t_n}h+\frac{3}{t_n^2}h^2\right)y_n+ht_n+2h^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} y(1) &= y_0 = 0 \\ y(1.5) &\approx y_1 = 0.5 \times 1 + 0.5 = 1 \\ y(2) &\approx y_2 = \left(1 + \frac{3}{3}\frac{2}{2} + \frac{3}{9}\frac{4}{4}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

2. **(3.5 points)**
L'erreur de troncature est donnée par

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\, f(t_n, y(t_n))\right),$$

De même la formule de Taylor implique

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h^2}{3!} y'''(\xi_n)$$

et donc

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq M_3 \frac{h^2}{3!},$$

avec

$$M_3 = \max_t |y'''(t)|.$$

La résolution du problème permet de trouver la solution

$$y(t) = t^3 - t^2.$$

$$y'''(t) = 6 \Longrightarrow M_3 = 6$$

ce qui implique

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^2 = 0.25.$$

3. **(2 points)**
Rappelons que l'erreur globale de la méthode d'Euler au point t_n est bornée comme suit

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right),$$

avec L la constante de Lipschitz et $M = \max_{t \in [1,2]} |y''(t)|$.

Comme

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{3}{t} \leq 3, \qquad t \in [1,2]$$

alors

$$L = 3.$$

De plus

$$M = \max_t (6t - 2) = 10.$$

Alors

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{10h}{2 \times 3}\left(e^3 - 1\right) \leq 10^{-4},$$

implique

$$h \leq \frac{6}{e^3 - 1} 10^{-5}.$$