RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Département De Mathématiques

Epreuve Finale
MI - L2 - S4

Module: ANALYSE COMPLEXE — Responsable: M.HOUBAD

Date: 31 Mai 2022 — Année: 2021 - 2022

Coefficient: 3 — Durée: $01h30$

Exercice 1 (04 pts)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit la courbe $(\mathcal{C})$ définie par

$$(\mathcal{C}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad \frac{(Re(z))^2}{a} + \frac{(Im(z))^2}{b} = 1 \right\}.$$

- Donner une paramétrisation de la courbe $(\mathcal{C})$.
- Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = Re(z)$ le long de la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 2 (06 pts)**.**
Pour $r, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $r < R$ on définit l'ensemble $\mathcal{A}(z_0, r, R)$ par

$$\mathcal{A}(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \quad r < |z - z_0| < R\}.$$

Soit la fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ dans $\mathbb{C}$ défie par

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 + 1}{(z-1)(z-3)}.$$

Donner le développement en série de Laurent de la fonction f sur les domaines suivantes

$$\mathcal{A}(0, 1, 3), \quad \mathcal{A}(0, 0, 1), \quad \mathcal{A}(0, 3, +\infty), \quad \mathcal{A}(1, 1, 2).$$

Exercice 3 (06pts)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre zéro et de rayon un.

- Calculer l'intégrale

$$I = \oint_{(\mathcal{C})} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} dz$$

- La fonction $\frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n}$ admet-elle une primitif ?
- Déduire la valeur des deux intégrale

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n} \, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} (\sin(\theta))^{2n} \, d\theta.$$

Exercice 4 (04pts)**.**
Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ le cercle de centre z_0 et de rayon r est noté $\mathcal{C}(z_0, r)$. Soit f une fonction développable en série entière dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$,.

- Montrer l'existence d'un $R > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in]0; R[: \quad \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)} dz.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0; R[$ calculer

$$\oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Département De Mathématiques

Epreuve Finale
Solution & Barème
MI - L2 - S4

Module: ANALYSE COMPLEXE — Responsable: M.HOUBAD

Date: 31 Mai 2022 — Année: 2021 - 2022

Coefficient: 3 — Durée: $01h30$

Exercice 1 (04 pts)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit la courbe $(\mathcal{C})$ définie par

$$(\mathcal{C}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad \frac{(Re(z))^2}{a} + \frac{(Im(z))^2}{b} = 1 \right\}.$$

- Une paramétrisation pour la courbe $(\mathcal{C})$. $\longleftarrow$ $\boxed{\text{02.00 pt}}$

  On pose $x = \sqrt{a} r \cos\theta$ et $y = \sqrt{b} r \sin\theta$, alors

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{(Re(z))^2}{a} + \frac{(Im(z))^2}{b} = 1, \quad Re(Z) = x, \quad Im(z) = y \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{a} r \cos\theta, \quad y = \sqrt{b} r \sin\theta, r = 1 \quad \theta \in [0; 2\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{a} \cos\theta, \quad y = \sqrt{b} \sin\theta, \quad \theta \in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

  ce qui donne

$$\gamma(t) = \sqrt{a} \cos\theta + i\sqrt{b} \sin\theta, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

- Calcul de l'intégrale de la fonction $f(z) = Re(z)$ le long de la courbe $(\mathcal{C})$. $\longleftarrow$ $\boxed{\text{02.00 pt}}$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \oint_{\mathcal{C}} Re(z)dz = \int_0^{2\pi} \sqrt{a} \cos\theta \, d(\sqrt{a} \cos\theta + i\sqrt{b} \sin\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} -a \sin\theta \cos\theta + i\sqrt{ab} (\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -a \sin\theta \cos\theta + i\sqrt{ab} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta \\ &= \left[a \frac{\left(\cos(\theta)\right)^2}{2} + i\sqrt{ab} \frac{\cos(2\theta)}{4} + i\sqrt{ab} \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= i\pi\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (06 pts)**.**
Pour $r, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $r < R$ on définit l'ensemble $\mathcal{A}(z_0, r, R)$ par

$$\mathcal{A}(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \quad r < |z - z_0| < R\}.$$

Soit la fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ dans $\mathbb{C}$ défie par

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 + 1}{(z-1)(z-3)}.$$

Le développement en série de Laurent de la fonction f.
La division euclidien et la décomposition en élément simple donnent

$$f(z) = 5 + z + \frac{17z - 14}{(z-1)(z-3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{37}{2}\frac{1}{z-3}. \qquad \longleftarrow \boxed{02.00 \text{ pt}}$$

- Pour $\mathcal{A}(0, 1, 3)$. $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$

  Pour $z \in \mathcal{A}(0, 1, 3)$ on obtient $1 < |z| < 3$ donc $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ et $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, d'ou

$$\begin{aligned}
\frac{17z - 14}{(z-1)(z-3)} &= \frac{3}{2z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{37}{6}\frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{2}\frac{1}{z^{k+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{37}{6(3^k)} z^k\right)
\end{aligned}$$

- Pour $\mathcal{A}(0, 0, 1)$. $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$

  Pour $z \in \mathcal{A}(0, 0, 1)$ on a $0 < |z| < 1$, d'ou

$$\begin{aligned}
\frac{17z - 14}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{37}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\
&= -\frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right) - \frac{37}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2} - \frac{37}{2(3^k)}\right) z^k
\end{aligned}$$

- Pour $\mathcal{A}(0, 3, +\infty)$ $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$

  pour $z \in \mathcal{A}(0, 3, +\infty)$ on obtient $3 < |z| < +\infty$ donc $0 < \left|\frac{3}{z}\right| < 1$, d'ou

$$\begin{aligned}
\frac{17z - 14}{(z-1)(z-3)} &= \frac{3}{2z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{37}{2z}\frac{1}{1 - \frac{3}{z}} \\
&= \frac{3}{2z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\right) + \frac{37}{2z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{z^k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{37(3^k)}{2}\right) \frac{1}{z^{k+1}}
\end{aligned}$$

- Pour $\mathcal{A}(1,1,2)$. $\longleftarrow$ $\boxed{01.00\text{ pt}}$

  Pour $z \in \mathcal{A}(1,1,2)$ on a $1 < |z-1| < 2$, alors $\left|\dfrac{z-1}{2}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{1}{z-1}\right| < 1$ d'ou

$$\begin{aligned}
\frac{17z-14}{(z-1)(z-3)} &= \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{37}{4}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}} \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{37}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k\right) \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{37}{2^{k+1}}\,(z-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3 (06pts)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre zéro et de rayon un.

- Calcul de l'intégrale $\longleftarrow$ $\boxed{02.00\text{ pt}}$

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{(\mathcal{C})} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{2n} d\,e^{i\theta} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} i\,e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k\, e^{i\theta k} e^{-i\theta(2n-k)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k\, e^{-i\theta(2n-2k)}\, d\theta \\
&= i\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left(\int_0^{2\pi} e^{-i\theta(2n-2k)}\, d\theta\right) \\
&= i\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left\{\begin{array}{lll} 2\pi & Si & n=k \\ 0 & Si & n\neq k \end{array}\right\} \\
&= 2\pi C_{2n}^n i
\end{aligned}$$

- Existence de la primitif de $\dfrac{1}{z}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^{2n}$. $\longleftarrow$ $\boxed{02.00\text{ pt}}$

  La courbe $(\mathcal{C})$ est fermée est $\displaystyle\oint_{(\mathcal{C})} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz \neq 0$ donc $\dfrac{1}{z}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^{2n}$ n'admet pas une primitif.

- Déduction des intégrale

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n}\, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} (\sin(\theta))^{2n}\, d\theta.$$

  On a

$$I = \oint_{(\mathcal{C})} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \int_0^{2\pi} i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} d\theta = 2\pi C_{2n}^n i$$

  Or

$$\int_0^{2\pi} i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} d\theta = \int_0^{2\pi} i\,2^{2n}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2n} d\theta = i\,4^n\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta$$

  Ce qui donne que

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{2\pi}{4^n} C_{2n}^n. \quad \longleftarrow \boxed{01.00\text{ pt}}$$

De plus

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left((\sin\theta)^2\right)^n d\theta = \int_0^{2\pi} \left(1-(\cos\theta)^2\right)^n d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p (\cos\theta)^{2p} d\theta = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2p} d\theta \\ &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{2\pi}{4^p} C_n^p C_{2p}^p. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00\text{ pt}}\end{aligned}$$

Exercice 4 (04pts)**.**
Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ le cercle de centre z_0 et de rayon r est noté $\mathcal{C}(z_0, r)$. Soit f une fonction développable en série entière dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$,.

- Existence d'un $R > 0$ et formule. $\longleftarrow \boxed{02.00\text{ pt}}$
  On prend R comme le rayon de convergence de la série entière

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,$$

  pour $r \in]0; R[$ dans le disc fermé $D(z_0, r)$ on a la convergence uniforme ce qui donne que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in]0; R[: \quad \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1-k}} dz\end{aligned}$$

  or dans le cas ou $n+1-k \neq 1$ on a

$$\oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1-k}} dz = 0$$

  donc il rest un seul cas correspond à $n+1-k = 1$ ce qui donne $k = n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in]0; R[: \quad \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)} dz.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0; R[$ on calcule $\longleftarrow \boxed{02.00\text{ pt}}$

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{n!} \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)} dz \\ &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)} dz \\ &= 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.\end{aligned}$$