Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2021/2022)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L2)
Contrôle continu du module Probabilités (12/04/2022, durée:1h30)

Exercice N°1 (7pts)

Une urne contient 12 boules: 3 rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité des événements suivants :
1) A="les trois boules sont rouges"
2) B="on a tiré une boule de chaque couleur"
3) C="aucune des trois boules n'est rouge"
4) D="au moins une des trois boules est rouge"
5) E="au moins une des trois boules est bleue"
6) F="au plus une des trois boules est bleue"

Exercice N°2 (6pts)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants:
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note les événements: M "Être porteur de la maladie" et T "Avoir un test positif".
1) Un animal est choisi au hasard.Quelle est la probabilité que son test soit positif?
2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade?

Exercice N°3 (7pts)

I] Une v.a X peut prendre l'une des trois valeurs 0 ou 1 ou 2 avec des probabilités positives ou nulle. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que:
$E(X) = \frac{3}{2},\ V(X) = \frac{1}{4}\ (4pts)$
II] La fonction de répartition F d'une v.a.r. discréte X est donnée par:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ 1/2 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 3/4 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

1) Sachant que $D_X = \{-1, 1, 2\}$, déterminer la fonction de masse de X (1.5pts)
2) Calculer $P(X \leq 0),\ P(0 \leq x \leq 1)$ (1.5pts)

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. »

Solution

Exercice N°1

Nous sommes dans un cas uniforme car chacune des boules a exactement la même chance d'être choisie indépendamment de sa couleur; ainsi P(A)=$\frac{cardA}{card\Omega}$
On commence par calculer le nombre total de combinaisons possibles de 3 boules parmi douze ie, cardΩ, qui est: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = 220 \ \ (1pt)$

1. $P(A) = \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{220} = 0.0045 \quad (1pt)$

2. $P(B) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{3\times4\times5}{220} = 0.2727 \quad (1pt)$

3. C="aucune des trois boules n'est rouge"="(3bleues et 0jaune) ou (1bleue et 2 jaunes) ou (2bleues et 1jaune) ou (0bleue et 3jaunes)"
   $P(C) = \frac{C_4^3 C_5^0 + C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1 + C_4^0 C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{84}{220} = 0.3818 \ \ (1pt)$

4. Il suffit de remarquer de $D = \overline{C}$, donc $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{136}{220} = 0.6181 \ \ (1pt)$

5. E="au moins une des trois boules est bleue" ="avoir 1, 2 ou 3 boules bleues" sinon on calcule l'evenement inverse "ne pas avoir de boule bleue du tout" comme pour C
   $P(\overline{E}) = \frac{C_3^3 C_5^0 + C_3^1 C_5^2 + C_3^2 C_5^1 + C_3^0 C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220}$ ainsi $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = \frac{164}{220} = 0.7636 \quad (1pt)$

6. F="au plus une des trois boules est bleue" ="ne pas en avoir du tout de boule bleue ie $\overline{E}$ et avoir exactement 1 boule bleue"
   $P(F) = P(\overline{E}) + \frac{C_4^1 C_3^2 + C_4^1 C_3^1 C_5^1 + C_4^1 C_5^2}{C_{12}^3} = \frac{168}{220} = 0.7636 \quad (1pt)$

Exercice N°2

On a un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie ie $P(M) = 2\% = 0.02 \Longrightarrow P(\overline{M}) = 0.98$ $(1pt)$
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ie $P(T/M) = 0.85 \ \Longrightarrow P(\overline{T}/M) = 0.15 \ \ (0.5pt)$
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas ie $P(\overline{T}/\overline{M}) = 0.95 \quad \Longrightarrow P(T/\overline{M}) = 0.05$ $(0.5pt)$
1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ? on cherche $P(T)$?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T/M) \cdot P(M) + P(T/\overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \qquad (1pt) \\ &= 0.85 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.98 \\ &= 0.066 = 6.6\% \quad (1pt) \end{aligned}$$

2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ? on cherche $P(M/T)$?

$$\begin{aligned} P(M/T) &= \frac{P(T/M)\cdot P(M)}{P(T)} \quad (1pt) \\ &= \frac{0.85\times 0.02}{0.066} \\ &= 0.2575 = 25.75\% \quad (1pt) \end{aligned}$$

Exercice N°3

I] Une v.a X peut prendre l'une des trois valeurs 0 ou 1 ou 2 avec des probabilités positives ou nulle. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $E(X)=\frac{3}{2},\ V(X)=\frac{1}{4}\ ie$

$$\begin{cases} E(X)=\frac{3}{2} \iff 0P_0+1P_1+2P_2=3/2 \quad (1pt) \\ V(X)=\frac{1}{4} \iff 0^2P_0+1^2P_1+2^2P_2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad (1pt) \end{cases}$$

Il faudra résoudre le système

$$\begin{cases} P_1+2P_2=3/2 \\ P_1+4P_2=\frac{10}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} 2P_2=\frac{10}{4}-\frac{3}{2} \\ P_1=\frac{3}{2}-2P_2 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} P_2=1/2 \\ P_1=1/2 \end{cases} etP_0=0 \text{ dans ce cas} \quad (1.5\text{pts})$$

<u>Conclusion</u>: finalement la v.a.X a pour fonction de masse (0.5pt):

xi	1	2
$P_i=P(X=xi)$	$P_1=1/2$	$P_2=1/2$

II] La fonction de répartition F d'une v.a.r. discréte X est donnée par:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si & x<-1 \\ 1/2 & si & -1\le x<1 \\ 3/4 & si & 1\le x<2 \\ 1 & si & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si & x<-1 \\ P_1 & si & -1\le x<1 \\ P_1+P_2 & si & 1\le x<2 \\ P_1+P_2+P_3=1 & si & x\ge 2 \end{cases} \quad (1pt)$$

1. Sachant que $D_X=\{-1,1,2\}$, On définit la fonction de masse, par (0.5pt) :

xi	-1	1	2
$P_i=P(X=xi)$	$P_1=1/2$	$P_2=1/4$	$P_3=1/4$

2. Calculer $P(X\le 0),\ P(0\le x\le 1)$

$$P(X\le 0)=F(0)=1/2 \quad (0.5pt)$$

ou bien

$$P(X\le 0)=P(X=0)=P_1=1/2$$
$$P(0\le x\le 1)=P(X=1)=1/4 \quad (1pt)$$