Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

$2^{\text{ème}}$ année Mathématiques
Semestre 2

Contrôle Continu de Géométrie
14 Avril 2022
Le Corrigé

Exercice 1 (5 pts)

Soit Γ la partie de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ définie par les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+z^2-2xy &= 1 \\ \quad x+y+z &= 0 \end{cases}$$

Montrer que Γ est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ en la représentant à l'aide d'une paramétrisation régulière.

La deuxième équation nous donne $z=-(x+y)$; en reportant dans la première, on obtient

$$\frac{x^2}{\dfrac{a^2}{a^2+1}}+\frac{y^2}{\dfrac{b^2}{b^2+1}}=1 \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

On pose $\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ et $\beta=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}$. Ainsi les nouvelles équations qui définissent Γ sont :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \\ z=-x-y \end{cases}$$

Elles montrent que Γ est une courbe dans l'espace dont la projection sur le plan d'équation $z=0$ est une ellipse. On pourra donc prendre comme paramétrage :

$$\phi : t\in\mathbb{R}\mapsto \phi(t)=(\alpha\cos t, \beta\sin t, -\alpha\cos t-\beta\sin t) \quad \textbf{(1pt)}$$

Le vecteur tangent est donné par : $\phi'(t)=(-\alpha\sin t, \beta\cos t, \alpha\sin t-\beta\cos t)$ **(1pt)** qui n'est jamais nul car les deux premières composantes ne s'annulent pas en même temps **(1pt)**. C'est donc une représentation régulière. **(0.5pt)**

Exercice 2 (8 pts)

On considère la courbe paramétrée $\gamma : t\in\mathbb{R}\mapsto\gamma(t)=(\exp(t),\exp(-t),\sqrt{2}t)$.

1. *Calculer $\gamma'(t),\gamma''(t)$, et montrer que la courbe γ est birégulière.*
   Dérivons par rapport à t l'application γ deux fois, qui est bien de classe C^2, on trouve
   $$\gamma'(t)=(\exp(t),-\exp(-t),\sqrt{2})\neq(0,0,0),\quad \gamma''(t)=(\exp(t),\exp(-t),0)\neq(0,0,0) \quad \textbf{(1.5pt)}$$
   Ce qui montre que γ est régulière et birégulière.
2. *Déterminer $T(t), N(t)$ et $B(t)$*
   On a $\gamma'(t)=(\exp(t),-\exp(-t),\sqrt{2})$ de norme $\|\gamma'(t)\|=\exp(t)+\exp(-t)$ **(0.5pt)**
   (a) Le vecteur tangent $T(t)$: posons $v(t)=\exp(t)+\exp(-t)$
   On a $T(t)=\dfrac{\gamma'(t)}{v(t)}$, ce qui donne
   $$T(t)=\Big(\frac{\exp(t)}{\exp(t)+\exp(-t)},\frac{-\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-)},\frac{\sqrt{2}}{\exp(t)+\exp(-t)}\Big) \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(b) Le vecteur normal : $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$.

Or $T'(t) = \dfrac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\Big(2, 2, \sqrt{2}(\exp(-t)-\exp(t)\Big)$ **(0.5pt)** de norme

$$\|T'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{\exp(t)+\exp(-t)} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

d'où $N(t) = \dfrac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\Big(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \exp(-t)-\exp(t)\Big)$ **(0.5pt)**.

(c) Le vecteur binormal : $B(t) = T(t) \wedge N(t) = \dfrac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\Big(-\exp(-t), \exp(t), \sqrt{2}\Big)$ **(1pt)**.

3. *Déterminer la courbure et la torsion.*

(a) La courbure : $\kappa_\gamma(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{1}{\exp(t)+\exp(-t)} . \dfrac{\sqrt{2}}{\exp(t)+\exp(-t)}$.

D'où $\kappa_\gamma(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{\exp(t)+\exp(-t)}$ **(0.5pt)**

(b) La torsion : $\tau_\gamma(t) = -\dfrac{1}{v(t)} B'(t).N(t)$.

Comme $B'(t) = \dfrac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\Big(2, 2, \sqrt{2}(\exp(-t)-\exp(t)\Big)$ **(0.5pt)**, on obtient donc

$$\tau_\gamma(t) = -\frac{\sqrt{2}}{(\exp(t)+\exp(-t))^2} \quad \textbf{1pt}$$

4. *Déterminer* $\dfrac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}$.

On a évidemment $\dfrac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} = -1$ **0.5pt**

5. *Montrer que l'application* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $u(t) = \dfrac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} T(t) + B(t)$ *est constante.* On a

$$u(t) = -T(t) + B(t) = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} -\exp(t)-\exp(t) \\ \exp(t)+\exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur constant par rapport à t **(0.5pt)** .

Exercice 3 (7 pts)

On considère la courbe paramétrée par la longueur d'arc $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{-\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 = C \tag{1}$$

où κ et τ sont la courbure et la torsion respectivement.

1. *Montrer que* $\left(\dfrac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \dfrac{\tau}{\kappa}$

En dérivant (1), on obtient

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)\left(\frac{1}{\kappa}\right)' + \left(\frac{-\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)\left(\frac{-\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = 0$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\left(\frac{1}{\tau}\right)\left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{-\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right] = 0 \quad \textbf{(1pt)}$$

Comme τ et $\left(\dfrac{1}{\kappa}\right)'$ ne s'annulent pas, alors $\dfrac{\tau}{\kappa} = \left(\dfrac{-\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'$ **(1pt)**.

2. *Calculer* $\Omega'(t)$ *où* $\Omega(t) = \alpha(t) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)N(t) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)B(t)$.
   On a

$$\Omega'(t) = \alpha'(t) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N(t) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)N'(t) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' B(t) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)B'(t) \quad \textbf{(1pt)}$$

   En utilisant les formules de Frenet, on obtient : $\Omega'(t) = \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\right)B(t)$ **(1pt)**.
   Le fait que $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'$, nous donne $\forall t \in I, \Omega'(t) = 0$ **(0.5pt)**.
3. *Montrer qu'il existe* Ω *de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* $\|\alpha(t) - \Omega\|$ *soit constant.*
   On calcule $\alpha(t) - \Omega(t) = -\frac{1}{\kappa}N(t) + \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}B(t)$, dont le carré de la norme est

$$\|\alpha(t) - \Omega\|^2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 = C \quad \textbf{(1pt)}$$

   Comme $\Omega'(t)$ est nulle pour tout t, alors $\forall t \in I, \Omega(t) = \Omega = cste$ **(0.5pt)**.
   On peut conclure donc, en utilisant la formule établie à la question précédente, que le support de la courbe α est inclus dans la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{C}$ **(1pt)**.