Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.
Module : *Analyse 4* - Épreuve de Contrôle continu.
Jeudi 14/04/2022 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (04pts)

1. Montrer que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on a
$$|ad - bc| \leq (|a| + |b|)(|c| + |d|)$$

2. Rappelons la définition du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ le produit vectoriel est définit par $X \wedge U = \begin{pmatrix} yw - zv \\ -xw + zu \\ xv - yu \end{pmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|X\|_1 = |x| + |y| + |z|$. Montrer que
$$\|X \wedge U\|_1 \leq 2\|X\|_1 \|U\|_1.$$

Exercice 2 : (08pts) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } \ y \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ y = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$, l'existence de ses dérivées partielles premières, puis sa différentiabilité.

Exercice 3 : (08pts) Soient a, b deux paramètres réels tels que $|ab| \leq 2$. On considère la fonction H définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $H(x,y) = (u,v)$ où
$$u = x + \frac{a}{1+y^2} \qquad \text{et} \qquad v = y + \frac{b}{1+x^2}$$

1. Montrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier la fonction suivante $\varphi(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer enfin que H est localement inversible au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$ en utilisant le théorème de l'inversion locale.

$2^{\text{ème}}$ année de Licence de Mathématiques - Semestre 4 - 2021/2022.

Module : « Analyse 4 » - Epreuve de Contrôle - Corrigé.

Exercice 1 : (04pts)

1°/ Montrons que $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$: $|ad-bc| \leq (|a|+|b|)(|c|+|d|)$

D'après l'inégalité triangulaire on a :

$$|ad-bc| \leq |a|\cdot|d| + |b|\cdot|c|$$

Or $|a| \leq |a|+|b|$ et $|b| \leq |a|+|b|$ donc 1pt

$$|ad-bc| \leq (|a|+|b|)|d| + (|a|+|b|)|c| = (|a|+|b|)(|c|+|d|).$$

2°/ On a : $\|X \wedge U\|_1 = |yw-zv| + |xw-zu| + |xv-yu|$

En utilisant l'inégalité de la $1^{\text{ère}}$ question, on peut écrire :

$|yw-zv| \leq (|y|+|z|)(|w|+|v|) \leq \|X\|_1 (|w|+|v|)$

$|xw-zu| \leq (|x|+|z|)(|w|+|u|) \leq \|X\|_1 (|w|+|u|)$ 3pts

$|xv-yu| \leq (|x|+|y|)(|v|+|u|) \leq \|X\|_1 (|v|+|u|)$

$\Longrightarrow \|X \wedge U\|_1 \leq \|X\|_1 (\underbrace{2|w|+2|v|+2|u|}_{2\|U\|_1})$ d'où $\boxed{\|X \wedge U\|_1 \leq 2\|X\|_1 \cdot \|U\|_1}$

Exercice 2 : (08pts)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1°/ Continuité : * Si $y \neq 0$, alors f est continue au point (x,y) car elle est composée de plusieurs fonctions continues ($(x,y) \mapsto xy$; $(x,y) \mapsto x/y$ et la fonction sinus).

* Etudions la continuité en un point $(x_0, 0)$. 2pts

On a $|f(x,y) - \overset{=0}{f(x_0,0)}| \leq |xy|$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |xy| = 0$ donc

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0$, d'où la continuité en $(x_0,0)$. En définitive f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

2°/ Dérivées premières :

* Pour $y \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin(x/y) + x \cos(x/y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \sin(x/y) - \frac{x^2}{y} \cos(x/y)$

* Pour $y = 0$; $\frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0, \forall x$.

et $\frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = x \sin(x/t)$. On a $\lim_{t \to 0} x \sin(x/t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$

Donc pour l'existence des dérivées premières on a :

i/ $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \sin(x/y) + x \cos(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ existe $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. 2pts

ii/ $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \sin(x/y) - \frac{x^2}{y} \cos(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$ 2pts

Donc cette dérivée existe seulement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y = 0\}$.

3°/ Différentiabilité : * Pour $y \neq 0$, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues puisqu'elles sont composées de fonctions continues. Donc f est différentiable dans ce cas.

* Pour $y = 0$ et $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas. Donc dans ce cas f n'est pas différentiable.

* Pour le point $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Donc le candidat à la différentielle est $df_{(0,0)}(h_1, h_2) = 0.h_1 + 0.h_2 = 0$. Ainsi 2pts

$$\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2 \sin(h_1/h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

On a $|h_1| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ et $|h_2| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \Rightarrow |h_1 h_2| \leq h_1^2 + h_2^2$.

D'où $\left| \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \underbrace{|\sin(h_1/h_2)|}_{\leq 1} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

$\Rightarrow \lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \Rightarrow f$ est différentiable en $(0,0)$ avec $df_{(0,0)} \equiv 0$.

Exercice 3 : (08pts) $H(x,y)=(u,v)$ avec $\begin{cases} u = x + \dfrac{a}{1+y^2} \\ v = y + \dfrac{b}{1+x^2} \end{cases}$

1°/ $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$: en effet u et v sont des fractions rationnelles en (x,y) avec des dénominateurs $1+x^2 \neq 0$ et $1+y^2 \neq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc H est bien de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. 1pt

2°/ Etude de φ : $\varphi(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, $D_\varphi = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \varphi(t) = 0$.

φ est impaire. $\varphi'(t) = \dfrac{(1+t^2)^2 - 4t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = \dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}$

signe de φ' : $-$ 0 $+$ 0 $-$ sur $\mathbb{R}$, les zéros en $-1/\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$. 3pts

Tableau de variation :

t	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0

3°/ Inversibilité locale de H : Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de l'inversion locale au voisinage d'un pt (x,y) fixé.

1ère hypothèse : $H \in C^1$ c'est déjà fait.

2ème " : inversibilité de la jacobienne

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2ay}{(1+y^2)^2} \\ \frac{-2bx}{(1+x^2)^2} & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det\left(J_H(x,y)\right) = 1 - \dfrac{4abxy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} = 1 - 4ab\,\varphi(x)\varphi(y)$. 4pts

On a $|\varphi(x)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow |\varphi(x)\varphi(y)| \leq \dfrac{27}{16^2} \Rightarrow 4|ab\varphi(x)\varphi(y)| \leq \dfrac{27|ab|}{64}$

Or par hypothèse $|ab| \leq 2$ donc $4|ab\varphi(x)\varphi(y)| \leq \dfrac{27}{32} < 1$.

ou encore $-1 < 4ab\varphi(x)\varphi(y) < 1$ (stricte)

$\Rightarrow 1 - 4ab\varphi(x)\varphi(y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Donc H est localement inversible au voisinage de tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.