| | |
|---|---|
| Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen | A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques |
| Faculté des Sciences - Département de Mathématiques | Analyse 3 - Fiche de T.D n°6 |

**Exercice 1 :** On donne les deux fonctions définies par des intégrales

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\, dt \qquad , \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\, dt$$

Déterminer leurs domaines de définition, puis étudier leurs variations.

**Exercice 2 :** On pose pour tout $x$ réel

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \frac{\sin(xt)}{1+t^4}\, dt$$

1. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
4. Montrer que $F^{(4)}(x) + F(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

**Exercice 3 :** On pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$$

1. Quel est le domaine de définition de $G$ ?
2. Montrer que $G$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle.
3. En déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

# 2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022.

## Module : "Analyse III" - T.D. N° 6 - Corrigé.

**Exercice 1 :** * $f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt$

- Domaine de $f$ : Pour déterminer le domaine de définition de $f$, il faut trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale est finie. Posons $u(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$. Pour $x \neq 0$, la fonction $u(x,\cdot)$ est continue $\forall t$ et donc l'intégrale existe dans ce cas. Examinons le cas $x=0$, $u(0,t) = \frac{1}{(1+t^2)t^2}$, elle n'est pas définie en $t=0 \in [-1,1]$ de plus $\lim_{t\to 0} u(0,t) = +\infty$. Donc l'intégrale est impropre en $t=0$. On a $u(0,t) \sim \frac{1}{t^2}$, $(t \to 0)$. Or la fonction $\frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de $0$ (modèle de Riemann en $t=0$, avec $\alpha = 2 > 1$). Donc l'intégrale diverge en $0$. D'où $f$ n'est pas définie en $x=0$.
  Ainsi $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[}$

- Etude de $f$ : On a $f(-x) = f(x)$, et $D_f$ est symétrique par rapport à $x=0$, donc $f$ est paire. On fera l'étude sur $]0,+\infty[$ seulement. On a aussi $u(x,-t) = u(x,t)$ donc

$$f(x) = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)}, \quad x \in ]0,+\infty[.$$

Si $x \geq a > 0$, alors $x^2+t^2 \geq a^2+t^2$ et $u(x,t) \leq u(a,t)$; de plus $\int_0^1 u(a,t)\,dt$ converge. Donc on peut passer à la limite sous l'intégrale quand $x \to +\infty$. On a $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\int_0^1 \left(\lim_{x\to+\infty} u(x,t)\right) dt = 0$.

Pour l'étude de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, on peut commencer par faire le changement de variable $t = x\tau$, alors

$$f(x) = 2\int_0^{1/x} \frac{x\,d\tau}{(1+\tau^2x^2)(x^2+x^2\tau^2)} = \frac{2}{x}\int_0^{1/x} \frac{d\tau}{(1+\tau^2)(1+\tau^2x^2)}$$

$$\Longrightarrow \quad x\,f(x) = 2\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\mathbb{1}_{[0,1/x]}(\tau)}{(1+\tau^2)(1+\tau^2x^2)}}_{v(x,\tau)}\,d\tau.$$

où $\mathbb{1}_{[0,1/x]}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\le\tau\le 1/x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ fonction indicatrice de $[0,1/x]$.

On a la majoration évidente : $(0\le)\, v(x,\tau) \le \dfrac{1}{1+\tau^2}$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ converge. Donc on peut passer à la limite sur $x\to 0^+$ sous l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(x,\tau)\,d\tau$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} x\,f(x) = 2\int_0^{+\infty}\left(\lim_{x\to 0^+} v(x,\tau)\right)d\tau = 2\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^2} = \pi.$$

Ce qui veut dire que dans $V(0^+)$ on a : $f(x)\sim \pi/x$ càd

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Pour les variations on a d'abord : $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)^2}$.

et pour tout $x_0>0$ fixé et $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta$ petit (avec $x_0-\delta>0$) $0<\delta<x_0$.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \le \frac{2(x_0+\delta)}{(1+t^2)[(x_0-\delta)^2+t^2]^2} = g_0(t)$$

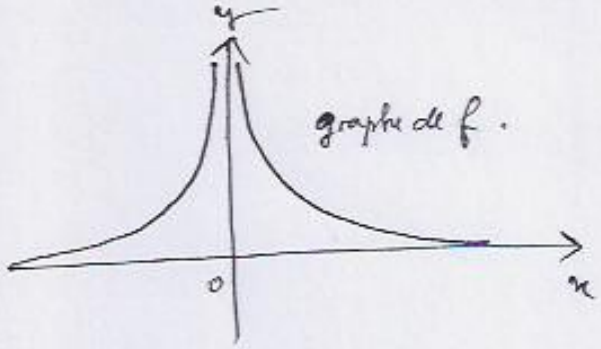
Il est clair que $\int_0^1 g_0(t)\,dt$ converge. Donc $\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\,dt$ converge normalement si $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ ; donc uniformément. Ceci implique qu'on peut <u>dériver</u> sous le signe de l'intégrale et donc

$$f'(x) = 2\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt = -4x\underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)^2}}_{>0}$$

ou encore sur $]0,+\infty[$, $f'(x)<0$.

On a donc le tableau de variations de $f$ suivant

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




<u>Remarque</u>: Le but de l'exercice est d'étudier une fonction définie par une intégrale, sans la calculer explicitement; chose qui souvent impossible. Toutefois dans ce cas précis, le calcul de $f$ est possible. On a : $u(x,t) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right]$

et donc $f(x) = \frac{2}{x^2-1}\left[\operatorname{arctg} t - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}(t/x)\right]_0^1$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x^2-1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}(1/x)\right]}$$

Il ne faut pas penser que $f$ n'est pas "définie" en $x = \pm 1$. En fait il y a une limite quand $x \to \pm 1$ de l'expression de $f$. Par exemple $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}(1/x)\right] = 0$ et cette dernière fonction est dérivable en $x = 1$ !

* $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\, dt$ ; $u(x,t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$.

De manière similaire au cas précédent, $\forall x \neq 0$, $u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale est impropre seulement $\pm\infty$.

Or $u(x,t) \sim \frac{1}{1+t^2}$, $t \to \pm\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge. Donc $g$ est définie $\forall x \neq 0$. Pour $x=0$, $u(0,t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2}$ cvg.

Ainsi le domaine de $g$ est $\boxed{D_g = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[}$

La fonction $g$ est paire. L'étude se fera sur $[0, +\infty[$ seulement.

Aussi $u(x,-t) = u(x,t)$ donc $g(x) = 2\int_0^{+\infty} u(x,t)\, dt$.

On a $x^2+t^2 \geq t^2 \Rightarrow \frac{t^2}{x^2+t^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

donc on peut passer à la limite q^d $x \to +\infty$ sous le signe de l'intégrale et on obtient $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2\int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} u(x,t)\right)}_{=0} dt = 0$.

Pour la dérivée on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-2xt^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)^2}$$

. <u>Fixons $x_0 > 0$</u> : Choisissons $\alpha > 0$ tq $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset ]0, +\infty[$ $(0 < \alpha < x_0)$.

On a : $\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2t^2(x_0+\alpha)}{(1+t^2)[(x_0-\alpha)^2+t^2]^2}$, $\forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.

Ceci implique que $\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt$ converge normalement dans $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ donc uniformément. Le théorème de dérivation sous le signe de l'intégrale s'applique. Donc $g$ est dérivable en $x_0$. Ainsi $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Reste le point $x=0$.

On peut montrer facilement que la convergence <u>n'est pas normale</u> sur un intervalle contenant $x=0$.

Nous allons essayer de montrer directement que $g'(0)$ <u>n'existe pas</u>.

Par la définition des dérivées à droite et à gauche on a :

$$g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} \quad \text{et} \quad g'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

Si on arrive à montrer que $g'_d(0) \neq g'_g(0)$ alors $g$ ne sera pas dérivable en $0$. Posons dans l'expression de $g'_g(0)$, $x=-t$, $t>0$

alors $g'_g(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(-t)-g(0)}{-t} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t}$ (car $g$ est paire)

$$\Longrightarrow \boxed{g'_g(0) = -g'_d(0).}$$

Maintenant $g'_d(0) - g'_g(0) = g'_d(0) + g'_d(0) = 2g'_d(0)$.

Il suffit de montrer que $g'_d(0) \neq 0$, pour conclure.

On a $g(0) = 2\int_0^{+\infty} u(0,t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^{+\infty} = \pi$.

D'où $g(x)-g(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt - 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$. $(x>0)$.

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\left[\frac{t^2}{x^2+t^2} - 1\right] dt$$

$$= -2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

Posons $t = x\tau$, alors :

$$g(x)-g(0) = -2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{x\,d\tau}{(1+\tau^2x^2)(x^2+x^2\tau^2)}$$

$$\Longrightarrow \frac{g(x)-g(0)}{x} = -2\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau^2x^2)(1+\tau^2)}$$

On a $\left|\frac{1}{(1+\tau^2x^2)(1+\tau^2)}\right| \leq \frac{1}{1+\tau^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ cvg donc

on peut passer à la limite q$^d$ $x\to 0^+$ sous l'intégrale :

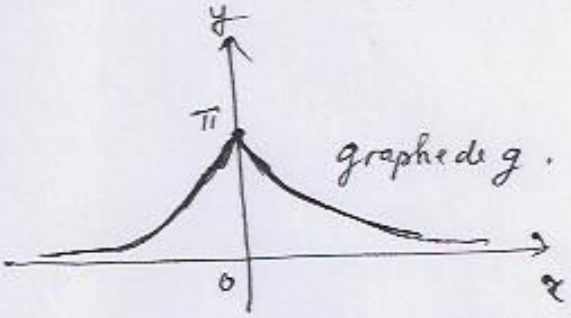
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = -2\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = -\pi \neq 0. \text{ cqfd.}$$

En définitive on peut écrire, $\forall x \neq 0$ :

$$g'(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt = -4x \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)^2}\,dt}_{>0}$$

Le tableau de variation de $g$ est :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | ‖ | $-$ | |
| $g$ | $\pi$ | $\searrow$ | $0$ |




<u>Remarque</u> : Là aussi, il est possible de calculer explicitement $g$. $u(x,t) = \dfrac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \dfrac{A}{1+t^2} + \dfrac{B}{x^2+t^2}$

avec $\begin{cases} A+B=1 \\ Ax^2+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1-x^2)=1 \Rightarrow A = 1/1-x^2 \\ B = -x^2 A = -\dfrac{x^2}{1-x^2}. \end{cases}$

D'où $g(x) = \dfrac{2}{1-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{2x^2}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2}$

$$= \frac{2}{1-x^2}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^{+\infty} - \frac{2x}{1-x^2}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right)\Big]_0^{+\infty} \quad (x>0).$$

$$= \frac{\pi}{1-x^2} - \frac{\pi x}{1-x^2} = \frac{\pi(1-x)}{1-x^2} = \frac{\pi}{1+x}.$$

et comme $g$ est paire alors : $\boxed{g(x) = \dfrac{\pi}{1+|x|}}$

Exercice 2 : $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{1+t^4}\, dt$

1°/ F définie et continue sur $\mathbb{R}$ : En effet si $u(x,t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{1+t^4}$

alors $|u(x,t)| \leq \frac{e^{-t}}{1+t^4} \leq \frac{1}{1+t^4}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ cvg.

donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque $u(\cdot,t)$ est continue.

2°/ $F \in C^\infty$ : Il faut montrer qu'on peut dériver indéfiniment $\int_0^{+\infty} u(x,t)\,dt$ sous le signe de l'intégrale. Pour y parvenir calculons

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+t^4} \cdot t^n \sin\left(xt + \frac{n\pi}{2}\right)$ $\Big|$ $(\sin \xi)^{(n)} = \sin\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right)$

d'où $\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \frac{t^n e^{-t}}{1+t^4}$ $(t \geq 0)$.

$\leq \frac{M_n}{1+t^4}$ où $M_n = \sup_{[0,+\infty[} (t^n e^{-t})$

Si $\varphi(t) = t^n e^{-t}$, $\varphi'(t) = e^{-t}[n t^{n-1} - t^n] = e^{-t} t^{n-1}[n-t]$ $\quad + \quad - \quad 0 \quad n$

$\Rightarrow \sup_{[0,+\infty[} \varphi(t) = \varphi(n) = n^n e^{-n} = M_n$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\,dt$ cvg normalement sur $\mathbb{R}$. (cqfd)

3°/ $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ : Faisons une intégration par partie $(x > 0)$.

pour $x \to +\infty$

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^4}\, d\left(-\frac{\cos xt}{x}\right) = \left[-\frac{e^{-t}\cos xt}{x(1+t^4)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{x}\left(\frac{e^{-t}}{1+t^4}\right)' dt$

$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\cos xt}{(1+t^4)^2}(1+t^4+4t^3)\, dt$.

$\Rightarrow |F(x)| \leq \frac{1}{x}\underbrace{\left[1 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1+4t^3+t^4)}{(1+t^4)^2}\, dt\right]}_{C} = \frac{C}{x}$

d'où $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$

Il est facile de voir que $F(-x) = -F(x)$ (à cause de $\sin(xt)$)

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -F(-x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} F(-x) = 0$.

4°/ <u>Eq° diff</u> : On a $F^{(4)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^4 \frac{\sin(xt)}{1+t^4}\, dt$

$$\Rightarrow F^{(4)}(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{(t^4+1)\sin xt}{1+t^4}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt)\, dt.$$

Calculons $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt)\, dt = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\, d(-e^{-t})$

$$I = \underbrace{\cancel{\left[-e^{-t}\sin xt\right]_0^{+\infty}}}_{0} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\, dt$$

$$I = x\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, d(-e^{-t}) = x\underbrace{\left[-e^{-t}\cos xt\right]_0^{+\infty}}_{1} - x^2\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\, dt}_{I}$$

$$\Rightarrow I = x - x^2 I \Rightarrow \boxed{I = \frac{x}{1+x^2}}$$

et donc $\boxed{F^{(4)}(x) + F(x) = \frac{x}{1+x^2}}$

Exercice 3 : $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$

1°/ $D_G$ : Posons $u(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$

· Si $x \geq 0$ alors $e^{-xt^2} \leq 1$ et $0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ cvg. Donc $G$ est bien définie pour $x \geq 0$.

· Si $x < 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} e^{-xt^2} = +\infty$, ainsi $e^{-xt^2} \geq -xt^2$

(facile à montrer). D'où $u(x,t) \geq (-x) \frac{t^2}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt$ divg

donc $G$ n'est pas définie pour $x < 0$.

Ainsi $\boxed{D_G = [0, +\infty[}$

2°/ Continuité et dérivabilité :

* On a déjà eu $0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$.

de plus $u(\cdot, t)$ est continue (en $x$). Donc $G$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

* Pour la dérivabilité on a : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

Soit $a > 0$ : $\sup_{x \geq a} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2} \leq \frac{M(a)}{1+t^2}$

donc la convergence est normale sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.
(de $\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}$)

Ainsi on peut dériver sous le signe $\int$, $\forall x \in ]0, +\infty[$.

* $G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$, $\forall x > 0$.

$\Rightarrow G'(x) - G(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = -J$

Posons $\sqrt{x}\, t = \xi$, alors

$J = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} = \frac{I}{\sqrt{x}}$ où $I = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ (cvg)

Résolvons maintenant l'équation différentielle :

$$G'(x) - G(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} I .$$

Multiplions par le facteur intégrant $e^{-x}$ :

$$\underbrace{e^{-x} G'(x) - e^{-x} G(x)}_{\left(e^{-x} G(x)\right)'} = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot I$$

$$\left(e^{-x} G(x)\right)' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} I$$

Intégrons dans $]0, x]$ $(x > 0)$ :

$$\int_0^x \left(e^{-t} G(t)\right)' dt = -I \cdot \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt . \quad \left(\text{Posons } t = \xi^2\right) \quad dt = 2\xi \, d\xi$$

$$\Rightarrow \left[e^{-t} G(t)\right]_0^x = -I \cdot 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\Rightarrow e^{-x} G(x) - G(0) = -2I \cdot \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\xi^2} d\xi$$

On a : $G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^{+\infty} = \pi/2$.

et $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$ (on peut passer à la limite sous $\int$).

Donc $$-\frac{\pi}{2} = -2 \underbrace{I \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi}_{I}$$

$$\Rightarrow I^2 = \pi/4 \Rightarrow \boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

càd $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$