Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°6

Exercice 1 : On donne les deux fonctions définies par des intégrales

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt \quad , \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,dt$$

Déterminer leurs domaines de définition, puis étudier leurs variations.

Exercice 2 : On pose pour tout x réel

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{1+t^4}\,dt$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
4. Montrer que $F^{(4)}(x) + F(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3 : On pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$$

1. Quel est le domaine de définition de G ?
2. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle.
3. En déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.