Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1 : Pour chacune des intégrales suivantes, dire en quel(s) point(s) elle est impropre, puis étudier sa convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \ , \ I_3 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx \ , \ I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\, dx$$

Exercice 2 : Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha \, dx \ , \ J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b}\, dx \ , \ J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a \ln x}$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel strictement positif. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cosh(ax)\, dx$$

1. Pour quelles valeurs de a l'intégrale I_a est-elle convergente ?
2. Calculer la valeur de cette intégrale de deux façons différentes.

Exercice 4 : Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue et décroissante. Montrer que si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge aussi. Étudier la réciproque. (Ceci est le critère de comparaison entre une série et une intégrale impropre)

Exercice 5 : Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\text{l'intégrale } \int_0^{\infty} f'(x)\, dx \text{ converge}\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\right]$$

2ème année de Licence de Mathématiques _ Semestre 3 _ 2021/2022.

Module : "Analyse III" _ Corrigé de la liste de T. D. N° 5.

Exercice 1 : * $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$. Posons $f_1(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. C'est une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$, donc en particulier continue sur $[1,+\infty[$. Donc $\forall \lambda > 1$, f_1 étant continue sur $[1,\lambda]$, est ainsi localement intégrable. De là I_1 est une intégrale impropre en "$+\infty$" seulement ! Il est clair que $f_1(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$, est exactement le "modèle" de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$. l'intégrale I_1 est donc convergente.

On peut aussi utiliser directement la définition. Calculons

$$\int_1^{\lambda} \frac{dx}{x^{3/2}} = \left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^{\lambda} = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^{\lambda} = \frac{\lambda^{-1/2}}{-1/2} - \frac{1}{-1/2} = 2 - 2\lambda^{-1/2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}.$$

D'où $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right) = 2 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2$ (converge).

* $I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$. Posons $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}.(1+x)^{1/3}}$

$\forall c,d \in]-1,1[$, f_2 est continue sur $[c,d]$ car les seules singularités sont 1 et -1. Donc I_2 est impropre en -1 et en 1.

On peut écrire $I_2 = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{I_2'} + \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{I_2''}$

I_2' est impropre en -1 (seulement) et I_2'' est impropre en 1.

On a $(1+x)^{1/3} f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (1+x)^{1/3} f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow f_2(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}.(1+x)^{1/3}}$ au voisinage de -1 ; $\alpha = 1/3 < 1 \Rightarrow I_2'$ converge.

D'autre part $f_2(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}(1-x)^{1/3}}$ au voisinage de 1 ; $\alpha = 1/3 < 1 \Rightarrow I_2''$ converge.

D'où I_2 est convergente.

* $I_3 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$. Posons $f_3(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

Remarquons que sur $]0,1[$, f_3 est localement intégrable car continue.
Les problèmes d'intégration peuvent se poser éventuellement en $x=0$ et $x=1$.

Etude en $x=1$: On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f_3(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln x)'\Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$.

Ainsi f_3 est prolongeable par continuité en $x=1$. Donc f_3 est intégrable sur tout intervalle du type $[a,1]$, $0<a<1$. I_3 n'est donc pas impropre en 1.

Etude en $x=0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f_3(x) = +\infty$. I_3 est donc impropre en 0.

Pour la convergence on a d'abord $f_3(x) > 0$, $\forall x \in]0,1[$. De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, f_3(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x-1} = 0^+$. D'où $\exists\, M>0$ tq

$\forall x \in]0,1[\quad 0 < \sqrt{x}\, f_3(x) \leq M \Rightarrow 0 < f_3(x) < \frac{M}{\sqrt{x}}$. Comme $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$) alors $\int_0^1 f_3(x)\,dx$ converge (par comparaison).

* $I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$. Posons $f_4(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$. Sur $]0,\pi/2[$ f_4 est continue, donc I_4 est éventuellement impropre en 0 et $\pi/2$.

· Etude en $x=0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1$.

f_4 est donc prolongeable par continuité en $x=0$. I_4 n'est donc pas impropre en $x=0$.

· Etude en $x = \pi/2$: $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \frac{\overset{\to \pi/2}{x}\ \overset{\to 0}{\cos x}}{\underset{\to 1}{\sin x}} = 0$

f_4 est donc prolongeable par continuité en $x = \pi/2$ aussi. I_4 n'est donc pas impropre en $x=\pi/2$. En définitive I_4 n'est pas impropre. (Elle existe).

Exercice 2 : $\ast$ $J_1 = \int_0^{\pi/2} (tg\,x)^\alpha dx$. $\alpha \in \mathbb{R}$ paramètre.

Remarquons d'abord que sur $]0, \pi/2[$, $tg\,x > 0$, d'où $(tg\,x)^\alpha$ a un sens. De plus $(tg\,x)^\alpha$ est localement intégrable sur $]0, \pi/2[$.

Etude en 0 : On sait que $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x}{x} = 1$, donc

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{1}{x^\alpha} \cdot (tg\,x)^\alpha = 1 \Rightarrow (tg\,x)^\alpha \sim x^\alpha \quad (\text{qd } x \to 0^+)$$

$$\Rightarrow (tg\,x)^\alpha \sim \frac{1}{x^{-\alpha}} \text{, (Riemann)}$$

Il y aura convergence (en 0) si et ssi $-\alpha < 1 \Rightarrow \boxed{\alpha > -1}$

Etude en $\pi/2$: $\lim_{x \to \pi/2^<} tg\,x = +\infty$ à cause du fait que $tg\,x = \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{\underset{\to 0^+}{\cos x}}$

Faisons un développement limité de $\cos x$ en $x_0 = \pi/2$.

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\cos' \pi/2}{1!} \cdot (x - \pi/2) + (x - \pi/2)\,\varepsilon(x - \pi/2) \quad (\text{ordre } 1)$$

$$\cos x = -(x - \pi/2) + (x - \pi/2)\,\varepsilon(x - \pi/2) \qquad \lim_{x \to \pi/2} \varepsilon(x - \pi/2) = 0$$

$$\cos x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[1 - \varepsilon(x - \pi/2)\right]$$

Donc $tg\,x = \frac{\sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[1 - \varepsilon(x - \pi/2)\right]} \Rightarrow (tg(x))^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin x}{\left[1 - \varepsilon(x - \pi/2)\right]}\right)^\alpha}_{\xrightarrow{x \to \pi/2^-} 1}$

(tout est positif au voisinage de $\pi/2^-$)

donc au voisinage de $\frac{\pi}{2}^-$, $(tg\,x)^\alpha \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}$

qui est un modèle de Riemann, il y a convergence ssi $\boxed{\alpha < 1}$

En définitive J_1 est convergente si et ssi

$\boxed{-1 < \alpha < 1}$, ou bien $\boxed{\alpha \in]-1, 1[}$.

* $J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$; $a, b \in \mathbb{R}$ deux paramètres. $f(x) = \frac{x^a}{1+x^b}$.

<u>1</u>

1er cas : $\boxed{b=0}$ Dans ce cas $f(x) = \frac{1}{2}x^a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{-a}}$. C'est le modèle de Riemann. Il ne peut y avoir convergence en 0 et à l'∞ car cela exige d'avoir $-a<1$ et $-a>1$ en même temps. Donc pour $b=0$, J_2 est divergente.

2ème cas : $\boxed{b \neq 0}$ L'application $\varphi(x) = x^b$ est alors une bijection de $]0,+\infty[$ dans lui-même. En effet $\varphi'(x) = b\,x^{b-1} \neq 0,\ \forall x>0$.

et aussi $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } b>0 \\ +\infty & \text{si } b<0 \end{cases}$; $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } b>0 \\ 0 & \text{si } b<0. \end{cases}$

Posons alors le changement de variable $t = x^b \iff x = t^{1/b}$.

Ainsi : $J_2 = \frac{1}{|b|}\int_0^{+\infty} \frac{t^{a/b}}{1+t}\cdot t^{\frac{1}{b}-1}\,dt = \frac{1}{|b|}\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{\frac{a+1}{b}-1}}{1+t}}_{g(t)}\,dt$

• En $t=0$: $g(t) \sim t^{\frac{a+1}{b}-1} = \frac{1}{t^{1-\frac{a+1}{b}}}$

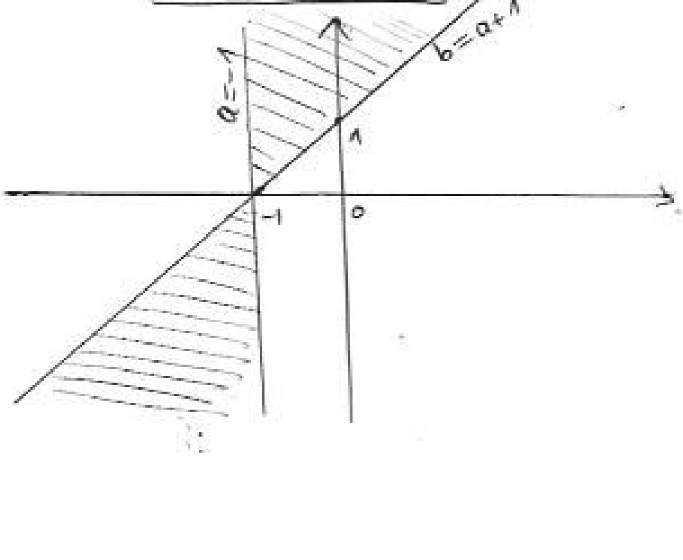
Il y aura convergence ssi : $1-\frac{a+1}{b} < 1 \iff \boxed{\frac{a+1}{b} > 0}$

• En $t=+\infty$: $g(t) \sim \frac{1}{t^{2-\frac{a+1}{b}}}$.

Il y aura convergence si et ssi : $2-\frac{a+1}{b} > 1 \iff \boxed{\frac{a+1}{b} < 1}$

<u>Conclusion</u> : L'intégrale impropre J_2 converge si et ssi

$$\boxed{0 < \frac{a+1}{b} < 1}$$



$$* \; J_3(x) = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a \ln x} \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \, . \quad f(x) = \frac{1}{x^a \ln x} \, .$$

La fonction f est continue sur $[2,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$ uniquement. Elle est strictement positive.

__1er cas__ : $\boxed{a > 1}$. On a $x^a f(x) = \frac{1}{\ln x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a f(x) = 0 \implies \exists A > 0$ assez grand tel que si $x \geq A$ alors $0 < x^a f(x) < 1$

D'où dans $[A,+\infty[$, $0 < f(x) < \frac{1}{x^a}$ or $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ converge car $a > 1$. Donc J_3 est convergente dans ce cas.

__2ème cas__ : $\boxed{a = 1}$ $\quad \int_2^{\lambda} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x)\right]_2^{\lambda} = \ln(\ln \lambda) - \ln(\ln 2)$

et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\lambda} \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left[\ln(\ln \lambda) - \ln(\ln 2)\right] = +\infty$

Donc J_3 diverge dans ce cas.

__3ème cas__ : $\boxed{a < 1}$. On aura $x f(x) = \frac{x^{\overset{>0}{(1-a)}}}{\ln x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{1-a}}{\ln x} = +\infty$.

D'où $\exists B > 0$ assez grand tel que sur $[B,+\infty[$ on aura $x f(x) \geq 1 \implies f(x) \geq 1/x$. Or $\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Donc par comparaison, J_3 est divergente.

__Conclusion__ : L'intégrale impropre J_3 est convergente si et ssi : $\boxed{a > 1}$.

__Remarque__ : C'est un cas particulier des intégrales de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a (\ln x)^b}$.

Exercice 3 : $a>0$ paramètre réel, $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} ch(ax)\, dx$.

1°/ **Convergence de I_a :** L'intégrale I_a est impropre à l'infini.

On a : $e^{-x} ch\,ax = \frac{1}{2} e^{-x}(e^{ax} + e^{-ax})$

• Si $a>0$: $e^{-x} ch\,ax = \frac{1}{2} e^{-(1-a)x}\Big[1 + \underbrace{e^{-2ax}}_{x\to+\infty \to 0}\Big] \sim \frac{1}{2} e^{-(1-a)x}$ à l'infini.

Donc I_a converge ssi : $1-a>0 \iff \boxed{a<1}$

• Si $a<0$: $e^{-x} ch\,ax = \frac{1}{2} e^{-(1+a)x}\Big[1 + \underbrace{e^{2ax}}_{x\to+\infty \to 0}\Big] \sim \frac{1}{2} e^{-(1+a)x}$

Donc I_a converge ssi : $1+a>0 \iff \boxed{a>-1}$

• Si $a=0$ $e^{-x} ch(0.x) = e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

Conclusion : I_a converge si et ssi $\boxed{a \in]-1,1[}$.

2°/ **Calcul de I_a :** $\boxed{1^{ere} \text{ méthode}}$ $I_a = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{-(1-a)x} + e^{-(1+a)x}\right] dx$

$$I_a = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1-a)x}}{-(1-a)} + \frac{e^{-(1+a)x}}{-(1+a)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[\frac{+1}{1-a} + \frac{1}{1+a}\right]$$

$$\boxed{I_a = \frac{1}{1-a^2}} \quad (a \in]-1,1[).$$

$\boxed{2^{eme} \text{ méthode}}$ Avec deux intégrations par parties.

$$I_a = \int_0^{+\infty} ch(ax)\,.\,d(-e^{-x}) = \underbrace{\left[-e^{-x} ch\,ax\right]_0^{+\infty}}_{=1} + a\int_0^{+\infty} e^{-x} sh\,ax\, dx.$$

$$I_a = 1 + a\int_0^{+\infty}(sh\,ax)(d(-e^{-x})) = 1 + a\underbrace{\left[-e^{-x} sh\,ax\right]_0^{+\infty}}_{=0} + a^2\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} ch\,ax\, dx}_{I_a}.$$

$$\implies I_a = 1 + a^2 I_a \iff (1-a^2) I_a = 1$$

$$\implies \boxed{I_a = \frac{1}{1-a^2}}.$$

Exercice 4 : $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ continue, décroissante.

Posons $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

1°/ I converge, alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge : Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ la somme partielle de la série en question. L'objet est de montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge. On sait que $S_n \geq 0$ car $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. Donc il suffit de montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est __majorée__. On a :

$$k \leq x \leq k+1 \Longrightarrow f(k) \leq f(x) \leq f(k+1) \quad (\text{décroissance de } f)$$

$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} f(k)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$$

$$\Longrightarrow f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k+1).$$

Faisons maintenant une sommation de ces double inégalités pour $k=0$ jusqu'à $k=n$. Alors :

$$\boxed{S_n \leq \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq S_{n+1} - f(0)}$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+1} f(x)\,dx$ existe car I converge. De plus $\int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{indépendant de } n}$. Donc $S_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. (cqfd)

2°/ Réciproque : L'hypothèse est que (S_n) converge. Comme elle est > 0 alors sa limite est son sup. $S_n \leq S = \sup_n S_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq S - f(0) \Rightarrow \int_0^{\lambda} f(x)\,dx \leq \int_0^{E(\lambda)+1} f(x)\,dx \leq S - f(0)$

La fonction $\lambda \mapsto \int_0^{\lambda} f(x)\,dx$ est croissante. Comme elle est majorée par $S - f(0)$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\lambda} f(x)\,dx$ existe. La réciproque est donc VRAIE.

Exercice 5 : Hypothèses : • $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1

• $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Question : (A) $\Longleftrightarrow$ (B) où les propositions (A) et (B) sont :

(A) : l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ converge

(B) : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1°/ (A) $\Longrightarrow$ (B) : On a : $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ (facile)

Maintenant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)dt = \underbrace{f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt}_{\text{existe par hypothèse (A)}} = L$

Supposons (par l'absurde) que $L \neq 0$.

Par exemple $L > 0$ (le ~~m~~ raisonnement reste vrai pour $L<0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 : \forall x \geq 0, x \geq C_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

En particulier si $x \geq C_\varepsilon \Longrightarrow f(x) \geq L - \varepsilon > 0$ (en choisissant $\varepsilon < L$, $\varepsilon = L/2$

$C_{L/2} \Longrightarrow f(x) \geq L/2 > 0$. par exemple)

D'où $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_0^{C_{L/2}} f(x)dx}_{\substack{\text{fini} \\ \text{car } f\in C^1}} + \int_{C_{L/2}}^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_0^{C_{L/2}} f(x)dx + \underbrace{\int_{C_{L/2}}^{+\infty} \frac{L}{2}\,dx}_{=+\infty}$.

Ceci contredit l'hypothèse que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Donc $L = 0$.

2°/ (B) $\Rightarrow$ (A) : $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$. Ici l'hypothèse est que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ existe. Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)dt = L - f(0)$ existe.

Donc $\int_0^{+\infty} f'(t)dt$ converge.