| | |
|---|---|
| Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen | A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques |
| Faculté des Sciences - Département de Mathématiques | Analyse 3 - Fiche de T.D n°5 |

**Exercice 1 :** Pour chacune des intégrales suivantes, dire en quel(s) point(s) elle est impropre, puis étudier sa convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \ , \ I_3 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx \ , \ I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\, dx$$

**Exercice 2 :** Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha \, dx \ , \ J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b}\, dx \ , \ J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a \ln x}$$

**Exercice 3 :** Soit $a$ un paramètre réel strictement positif. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cosh(ax)\, dx$$

1. Pour quelles valeurs de $a$ l'intégrale $I_a$ est-elle convergente ?
2. Calculer la valeur de cette intégrale de deux façons différentes.

**Exercice 4 :** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue et décroissante. Montrer que si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge aussi. Étudier la réciproque. (Ceci est le critère de comparaison entre une série et une intégrale impropre)

**Exercice 5 :** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\text{l'intégrale } \int_0^{\infty} f'(x)\, dx \text{ converge}\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\right]$$