Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, tracer le graphe sur trois périodes, vérifier les conditions du théorème de Dirichlet, puis déterminer leurs séries de Fourier :

1. f est 2π-périodique, paire et telle que sur l'intervalle $[0, \pi]$, $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$
2. g est 2π-périodique, impaire et telle que sur l'intervalle $[0, \pi]$, $g(x) = x(\pi - x)$
3. h est 2π-périodique, et telle que sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$, $h(x) = \sin(\frac{x}{2})$
4. F est 2π-périodique et telle que sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, $F(x) = \cosh(\lambda x)$ où $\lambda > 0$ est un paramètre.

Exercice 2 : A l'aide de certaines des séries de Fourier précédentes calculer les sommes suivantes (justifier)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad S_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \; , \; S_3 = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \; , \; S_4 = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$$

$$S_5 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda^2 + n^2} \qquad , \qquad S_6 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

Exercice 3 : Montrer que $\forall x \in]0, \pi[$ on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Exercice 4 : On considère la fonction de deux variables suivante

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

appelée noyau de Poisson. Montrer que pour $|r| < 1$, $P(r, \theta)$, pour θ fixé, se développe en série entière de la variable r, centrée en 0. En déduire que ce même développement peut être considéré comme un développement en série de Fourier par rapport à la variable θ, pour r fixé. Déduire enfin le développement en série de Fourier de la fonction $f(\theta) = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$.

Exercice 5 : En utilisant l'égalité de Parseval, déterminer toutes les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et qui vérifient

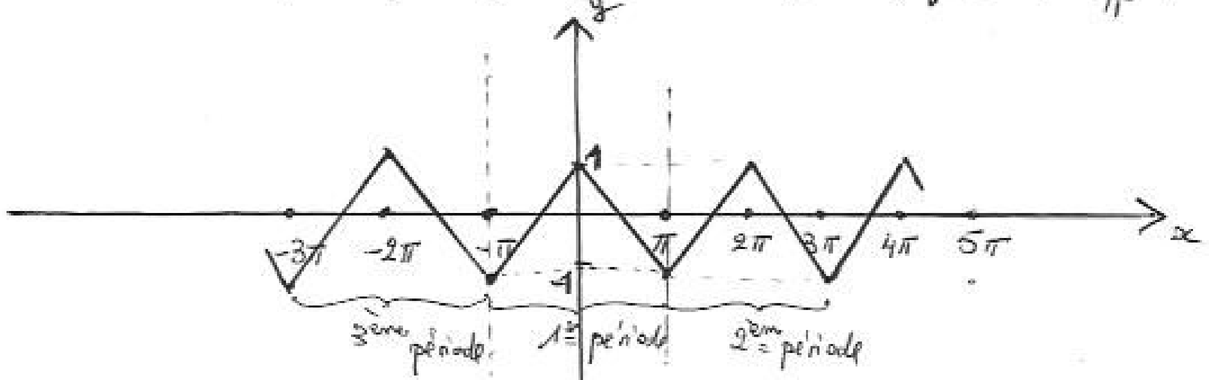
$$\exists M > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N} \qquad |f^{(k)}(x)| \leq M$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre k.

2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022.

Module: « Analyse III » - Série de T.D N°4 - Corrigé.

Exercice 1: 1.- f 2π-périodique, paire et sur $[0,\pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$.



Il est clair que f est partout continue, et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Donc elle est C^1 par morceaux. Elle vérifie donc les conditions du théorème de Dirichlet. Calculons sa série de Fourier. Comme elle est paire alors $\boxed{\forall n \geq 1,\ b_n = 0}$. Reste à calculer les a_n, $n \geq 0$.

$n=0$: $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi - \pi) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$n \geq 1$: $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\cancel{\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n}}}_{=0}\Big]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}(\sin nx)\,dx$$

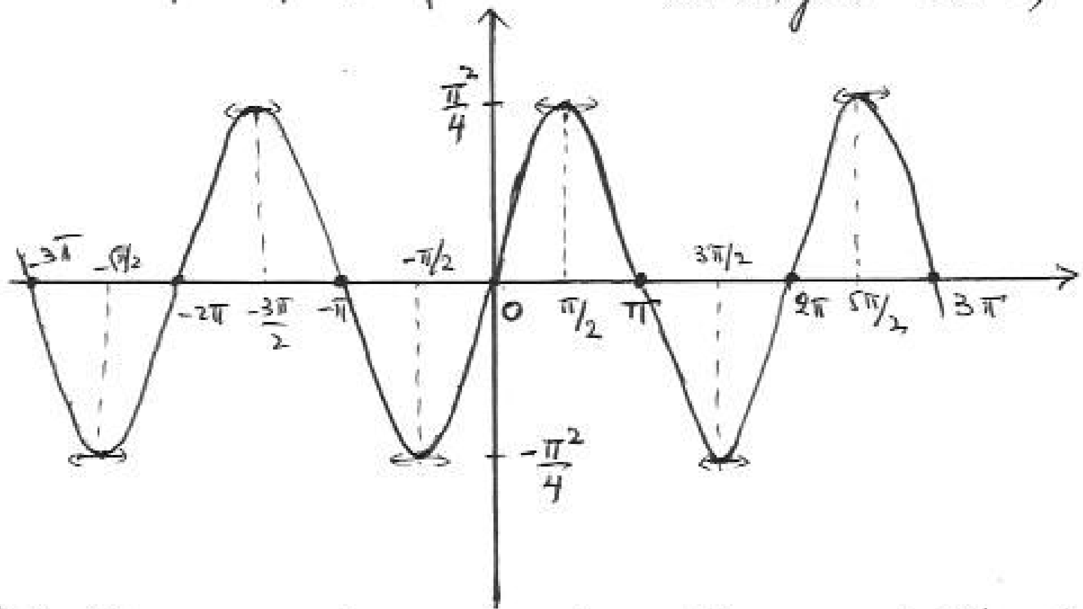
$$= \frac{4}{n\pi^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - \cos n\pi\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right]} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \text{ (paire)} \\ \dfrac{8}{\pi^2(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \text{ (impair)} \end{cases}$$

D'après le théorème de Dirichlet-Jordan et comme f est continue:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}}$$

2.- g est 2π-périodique, impaire et sur $[0,\pi]$, $g(x) = x(\pi - x)$



Il est clair que g est partout continue. Elle est aussi C^1 partout. Par exemple sur $[-\pi,\pi]$ on a $g(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ x(\pi + x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$

Il est facile de montrer que $g'(0^+) = g'(0^-) = \pi$, donc g est dérivable en 0. Même chose pour les points $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Calculons ses coefficients de Fourier. Comme elle est impaire, alors $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$. Reste à calculer les b_n, $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)(\sin nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x(\pi - x)\right) d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\cancel{x(\pi - x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)}^{=0}\right]_0^{\pi} +$$

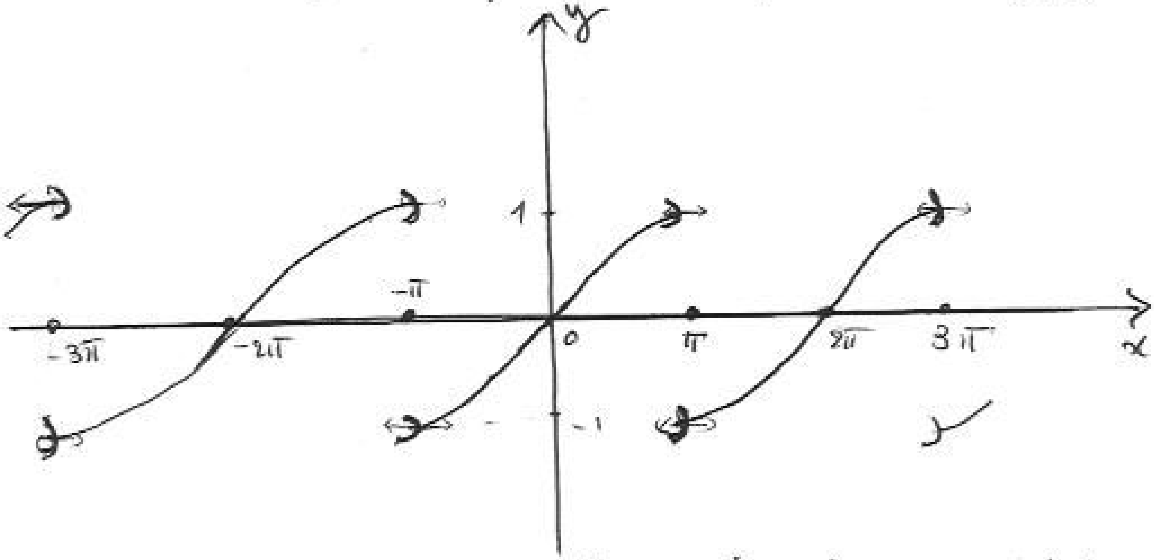
$$+ \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cancel{(\pi - 2x)\sin nx}^{=0}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}.$$

$$\boxed{b_n = \frac{4}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{8}{\pi(2k+1)^3} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}}$$

3.- h est 2π-périodique et tq sur $]-\pi, \pi]$, $h(x) = \sin(x/2)$.



Ici, h est impaire, discontinue (de première espèce) aux point $(2m\pi+\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$

Elle est C^1 par morceaux. On a $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)(\sin nx)\, dx$$

On utilise la formule : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

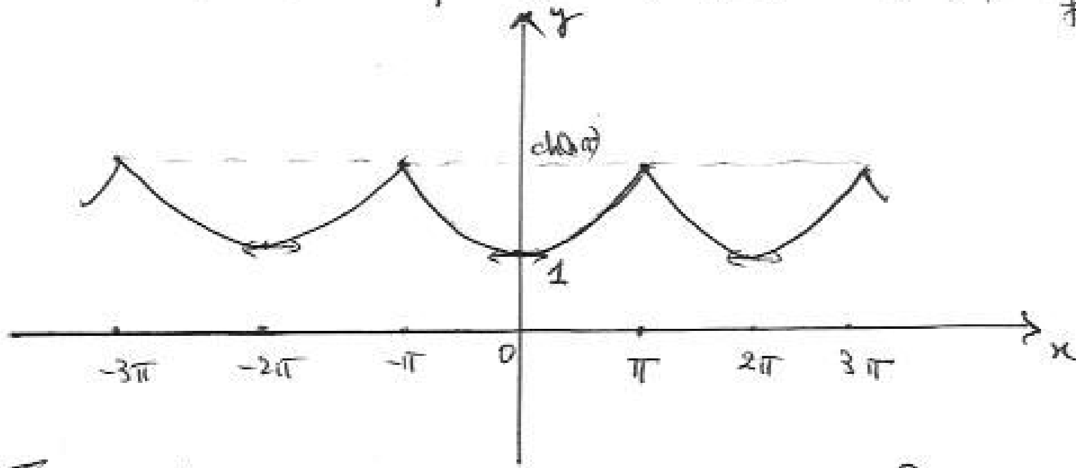
D'où $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]$

et donc
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{n-1/2} - \frac{\sin(n\pi+\pi/2)}{n+1/2}\right].$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{n-1/2} - \frac{(1)(-1)^n}{n+1/2}\right] = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1/4}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\setminus(\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2-1/4}\sin nx \\ &= \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{4n^2-1}\right)\sin nx \end{aligned}}$$

4.- F est 2π-périodique et tq sur $[-\pi,\pi]$, $F(x) = ch(\lambda x)$, $\lambda > 0$, fixé.



F est partout continue, paire et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

On a $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$. Calculons les a_n, $n \geq 0$.

<u>$n=0$</u> : $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ch(\lambda x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{sh(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^{\pi}$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi\lambda} sh(\pi\lambda)}$$

<u>$n \geq 1$</u> : $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ch(\lambda x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ch(\lambda x)\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$

$$= \frac{2}{\pi}\overbrace{\cancel{\left[ch(\lambda x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}}^{0} - \frac{2\lambda}{\pi n}\int_0^{\pi} sh(\lambda x)\sin(nx)\,dx$$

$$= +\frac{2\lambda}{\pi n}\int_0^{\pi} sh(\lambda x)\, d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{2\lambda}{\pi n^2}\left[sh(\lambda x)\cos nx\right]_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2\lambda^2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} ch(\lambda x)\cos(nx)\,dx.$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2\lambda}{\pi n^2} sh(\lambda\pi).(-1)^n - \frac{\lambda^2}{n^2} a_n$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right) a_n = (-1)^n \frac{2\lambda\, sh(\lambda\pi)}{\pi n^2} \Rightarrow \boxed{a_n = (-1)^n \frac{2\lambda\, sh(\lambda\pi)}{\pi(n^2+\lambda^2)}}$$

D'après le théorème de Dirichlet et comme F est continue alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda} + \frac{2\lambda sh(\pi\lambda)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos nx$$

Et pour $x \in [-\pi,\pi]$, on peut écrire :

$$ch(\lambda x) = \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda} + \frac{2\lambda\, sh(\pi\lambda)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos nx.$$

Exercice 2 : Calcul des sommes.

* $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S_2 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (en même temps).

Considérons $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{2|x|}{\pi}$ sur $[-\pi, \pi]$.

Pour $x = 0$, on a : $1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \boxed{S_2 = \pi^2/8}$

Maintenant $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2}}_{\frac{1}{4} S_1} + \underbrace{\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{S_2}$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right) S_1 = S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{4}{3} S_2 = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8}$

$\Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{\pi^2}{6}}$

* $S_3 = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$. Considérons la fonction g :

$$g(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = x(\pi - x) \text{ sur } [0, \pi]$$

Prenons $\boxed{x = \pi/2}$, $\sin(2k+1)(\pi/2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$.

$\Rightarrow \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \pi^2/4 \Rightarrow \boxed{S_3 = \frac{\pi^3}{32}}$

* $S_4 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2 + 16n + 3}$. On considère $h(\pi/2) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{4n^2 - 1}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \underbrace{(-1)^{2k}}_{1} \cdot \frac{(2k+1)}{4(2k+1)^2 - 1} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}_{(-1)^k}$$

$\Rightarrow \boxed{S_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}}$

* $S_5 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $S_6 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$

Ici on considère la fonction F avec $x = \pi$ et puis $x = 0$.

$\underline{x=\pi}$: $ch(\lambda\pi) = \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda} + \frac{2\lambda\, sh(\pi\lambda)}{\pi} \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda^2+n^2}}_{S_5}$ car $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{ch(\pi\lambda) - \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda}}{\frac{2\lambda\, sh(\pi\lambda)}{\pi}}$$

$$\boxed{S_5 = \frac{\pi}{2\lambda}\left[\coth(\pi\lambda) - \frac{1}{\pi\lambda}\right]} \quad \left(\coth z = \frac{ch z}{sh z}\right)$$

$\underline{x=0}$; $1 = \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda} + \frac{2\lambda\, sh(\pi\lambda)}{\pi} \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}}_{S_6}$

$$S_6 = \frac{1 - \frac{sh(\pi\lambda)}{\pi\lambda}}{\frac{2\lambda\, sh(\pi\lambda)}{\pi}}$$

$$\boxed{S_6 = \frac{\pi}{2\lambda}\left[\frac{1}{sh(\pi\lambda)} - \frac{1}{\pi\lambda}\right]}$$

Exercice 3 : $\forall x \in]0,\pi[$; $\frac{\pi - x}{2} \overset{①}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} \overset{②}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

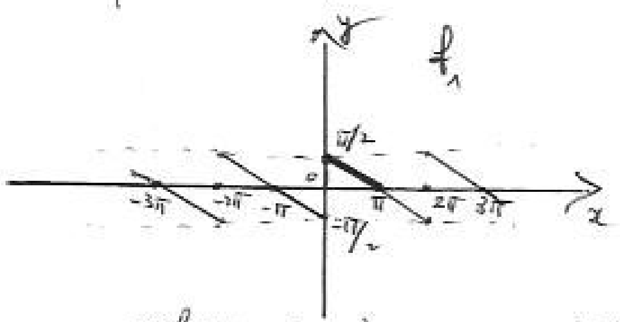
Comment faut-il comprendre cette double égalité ?

Réponse : il y a une fonction f, 2π-périodique tq sur $]0,\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

L'égalité ① signifie qu'on prolonge f (à $]-\pi,0[$) de manière impaire.

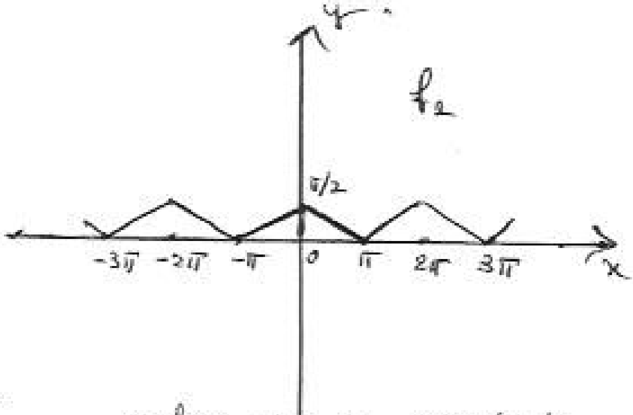
L'égalité ② " " " " " paire.

Dessinons les graphes de f pour satisfaire le prolongement impair puis celui paire.



prolongement impaire, 2π-périodique.

sur $]0,\pi[$, $f_1(x) = \frac{\pi - x}{2}$



prolongement pair, 2π-périodique.

sur $]0,\pi[$, $f_2(x) = \frac{\pi - x}{2}$

* Série de f_1 : $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$. Soit maintenant $n \geq 1$, calculons b_n.

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right) \sin nx \, dx$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} \left[-(\pi - x) \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx$.

$= \frac{+1}{n} - \frac{1}{n\pi} \left[\cancel{\frac{\sin nx}{n}}\right]_0^{\pi} = +\frac{1}{n}$

d'où $\boxed{f_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}} \Rightarrow \boxed{\text{sur }]0,\pi[\, ; \, \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}}$

* Série de f_2 : $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$. Calculons les coefficients a_n.

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2}(\pi - x)^2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 = \frac{\pi}{2}$

$n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$

$= \frac{1}{\pi} \left[\cancel{(\pi - x) \frac{\sin nx}{n}}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2} \left[1 - (-1)^n\right]$

$\Rightarrow \boxed{f_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos nx} \Rightarrow \boxed{\forall x \in]0,\pi[, \, \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}}$

Exercice 4 : $\quad \mathcal{P}(r,\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$ (Noyau de Poisson).

1°/ Développement en série entière en r ; $|r|<1$. Il faut décomposer la fraction rationnelle (en r) en éléments simples. Il faut d'abord faire un division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} -r^2+1 & r^2-2r\cos\theta+1 \\ \hline -(-r^2+2r\cos\theta-1) & -1 \\ \hline -2r\cos\theta+2 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(r,\theta) = -1 + 2\,\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = -1 + \dfrac{2(1-r\cos\theta)}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$

$$= -1 + \frac{A}{1-re^{i\theta}} + \frac{B}{1-re^{-i\theta}}.$$

Par identification on a : $\begin{cases} A+B=2 \\ -Ae^{-i\theta}-Be^{i\theta} = -2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$

D'où $\mathcal{P}(r,\theta) = -1 + \dfrac{1}{1-re^{i\theta}} + \dfrac{1}{1-re^{-i\theta}}$. Si $|r|<1$

alors $\mathcal{P}(r,\theta) = -1 + \sum_{n\geq 0} r^n e^{in\theta} + \sum_{n\geq 0} r^n e^{-in\theta}$

$$= -1 + \sum_{n\geq 0} r^n\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right) = -1 + 2\sum_{n\geq 0} r^n\cos n\theta.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(r,\theta) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n\cos n\theta} \quad (*)$$

2°/ Développement en série de Fourier en θ : Le développement $(*)$ est exactement le développement de $\mathcal{P}(r,\theta)$ (en θ) en série de Fourier avec $a_0 = 2$, $a_n = 2r^n$, $b_n = 0$. $(n\geq 1)$

3°/ Développement en série de Fourier de $f(\theta) = \dfrac{1}{2-\cos\theta}$.

Il suffit de trouver r tq $|r|<1$ et $\{1+r^2 = 4r$

car dans ce cas $1-2r\cos\theta+r^2 = 4r-2r\cos\theta = 2r(2-\cos\theta)$.

$r^2-4r+1=0 \Leftrightarrow (r-2)^2=3 \Leftrightarrow r = 2\pm\sqrt{3}$, seul $2-\sqrt{3}$ convient.

$\mathcal{P}(2-\sqrt{3},\theta) = \dfrac{1-(2-\sqrt{3})^2}{2(2-\sqrt{3})(2-\cos\theta)} = \sqrt{3}\,f(\theta) = 1 + 2\sum_{n\geq 1}(2-\sqrt{3})^n\cos n\theta$

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n\geq 1}(2-\sqrt{3})^n\cos n\theta}$$

Exercice 5 : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 2π-périodique.

Utilisons la forme complexe de la série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

On a $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \sup_{[-\pi,\pi]} |f(x)|$, càd la suite des coefficients de f, $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. On sait même que $\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$ par le théorème de Riemann-Lebesgue, car f est continue partout. Examinons les coefficients de f'.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, d(f(x))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f(x)\, e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi} \left[f(\pi) - f(-\pi) \right] + in\, c_n(f)$$

On a $f(\pi) = f(\pi - 2\pi) = f(-\pi) \Rightarrow f(\pi) - f(-\pi) = 0$.

Donc $c_n(f') = in\, c_n(f) \Rightarrow |c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} |c_n(f')|$ $(n \neq 0)$

$$\leq \frac{1}{|n|} \sup_{[-\pi,\pi]} |f'(x)|$$

et par récurrence, $|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|^p} \left(\sup_{[-\pi,\pi]} |f^{(p)}(x)| \right)$, $p \in \mathbb{N}$.

Par l'hypothèse de l'exercice, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|f^{(p)}(x)| \leq M$, donc

$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Faisons $p \to +\infty$ alors pour $|n| \geq 2$, $|n|^p \to +\infty \Rightarrow |c_n(f)| = 0$ si $|n| \geq 2$.

Ceci donne $\boxed{f(x) = c_{-1}\, e^{-ix} + c_0 + c_1\, e^{ix}}$ c_0, c_{-1}, c_1 qcqs.

ou avec la forme réelle

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x}$$