Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, tracer le graphe sur trois périodes, vérifier les conditions du théorème de Dirichlet, puis déterminer leurs séries de Fourier :

1. f est 2π-périodique, paire et telle que sur l'intervalle $[0,\pi]$, $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$
2. g est 2π-périodique, impaire et telle que sur l'intervalle $[0,\pi]$, $g(x) = x(\pi - x)$
3. h est 2π-périodique, et telle que sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$, $h(x) = \sin(\frac{x}{2})$
4. F est 2π-périodique et telle que sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$, $F(x) = \cosh(\lambda x)$ où $\lambda > 0$ est un paramètre.

Exercice 2 : A l'aide de certaines des séries de Fourier précédentes calculer les sommes suivantes (justifier)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad S_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \ , \ S_3 = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \ , \ S_4 = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$$

$$S_5 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda^2 + n^2} \qquad , \qquad S_6 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

Exercice 3 : Montrer que $\forall x \in \,]0,\pi[$ on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Exercice 4 : On considère la fonction de deux variables suivante

$$P(r,\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

appelée noyau de Poisson. Montrer que pour $|r| < 1$, $P(r,\theta)$, pour θ fixé, se développe en série entière de la variable r, centrée en 0. En déduire que ce même développement peut être considéré comme un développement en série de Fourier par rapport à la variable θ, pour r fixé. Déduire enfin le développement en série de Fourier de la fonction $f(\theta) = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$.

Exercice 5 : En utilisant l'égalité de Parseval, déterminer toutes les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et qui vérifient

$$\exists M > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad |f^{(k)}(x)| \leq M$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre k.