Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes. Préciser ensuite le domaine de convergence absolue.

1.

$$\sum (\ln n)^{\sqrt{n}}\, x^n \ , \ \sum \frac{(3n)!}{(n!)^3}\, x^n \ , \ \sum \left[\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right]^{n^5} z^n \ , \ \sum \frac{(2x+1)^{2n}}{3^n+5}$$

2. $\sum a_n\, x^n$ où a_n est la nième décimale du nombre π.
3. $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n}\, x^n$ avec $a > 0$ et $b > 0$ deux réels fixés.

Exercice 2 : Soit $\sum c_k\, x^k$ une série entière centrée en 0 de rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

$$\sum c_n\, x^{2n} \qquad , \qquad \sum c_n\, x^{n^2}$$

Exercice 3 : Soient

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}\, x^n \qquad \text{et} \qquad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\cosh n)\, x^n.$$

Déterminer d'abord les rayons de convergence de ces deux séries entières. Dans les domaines de convergence absolue respectifs, calculer ces deux sommes.

Exercice 4 : On donne les deux fonctions suivantes :

$$f_p(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-p)} \qquad \text{et} \qquad g_a(x) = \frac{1}{1-2ax+x^2}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres. Développer ces deux fonctions en séries entières centrées en 0 et préciser les domaines de validité des calculs.

Exercice 5 : Le but dans cet exercice est de déterminer l'expression de a_n pour la suite définie par récurrence comme suit

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 3 \end{cases}$$

1. Calculer a_2, a_3, a_4.
2. Supposer que les a_n sont les coefficients d'une série entière centrée en 0. Calculer à l'aide de la récurrence la somme $S(x)$ de cette série.
3. Développer ensuite $S(x)$ et donner l'expression de a_n.

2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022.

Module : "Analyse III" - T.D. N° 3 - Corrigé.

Exercice 1 : $* \quad \sum_{n\geq 1} (\ln n)^{\sqrt{n}} \cdot x^n \quad , \quad C_n = (\ln n)^{\sqrt{n}} \geq 0$

A l'aide de la formule de Cauchy on a :

$$C_n^{1/n} = (\ln n)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = (\ln n)^{1/\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(\ln n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$. D'où $\frac{1}{R} = 1 \Leftrightarrow \boxed{R=1}$

Le domaine de convergence absolue est $\boxed{]-1,1[}$.

$$* \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n. \text{ Ici } C_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} > 0$$

On utilise la formule de D'Alembert :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} = 3^3 = 27$.

D'où $\frac{1}{R} = 27 \Leftrightarrow \boxed{R = 1/27}$. Le domaine de convergence absolue est $\boxed{\left]\frac{-1}{27}, \frac{1}{27}\right[}$.

$$* \quad \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right]^{n^5} \cdot z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$C_n = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 1/n + \cos 1/n)\right]^{n^5} \geq 0$ car $\operatorname{ch} t \geq 1 \geq \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$

$$C_n^{1/n} = \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos 1/n\right)\right]^{n^4}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(C_n^{1/n}\right) = n^4 \ln\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 1/n + \cos\frac{1}{n}\right)\right]$$

Puisque quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$; alors on utilise les développements limités de $\operatorname{ch} t$ et $\cos t$ q^d $t \to 0$.

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + t^5 \varepsilon_1(t) \ , \ \lim_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0.$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + t^5 \varepsilon_2(t) \ , \ \lim_{t \to 0} \varepsilon_2(t) = 0$$

On fait appel aussi au développement de $\ln(1+x)$, $x \to 0$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_3(x) \ , \ \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Ainsi : $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t) = 1 + \frac{t^4}{24} + t^5 \varepsilon_4(t) \ / \ \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

et donc $\ln\left[\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)\right] = \ln\left[1 + \underbrace{\frac{t^4}{24} + t^5 \varepsilon_4(t)}_{x}\right]$

$$= \frac{t^4}{24} + t^5 \varepsilon_5(t) \quad \text{(à l'ordre 4).}$$

On peut donc écrire :

$$\ln\left[\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 1/n + \cos 1/n)\right] = \frac{1}{24 \cdot n^4} + \frac{1}{n^5} \varepsilon_5(1/n)$$

$$\Rightarrow \ln\left(C_n^{1/n}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{n} \varepsilon_5(1/n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{24}$$

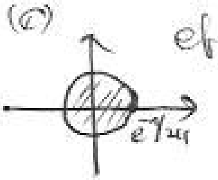
$$\text{et donc } \lim_{n \to +\infty} C_n^{1/n} = e^{1/24} = \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = e^{-1/24}}$$

Le domaine de convergence absolue est

$$\boxed{\left] -e^{-1/24}, \ e^{-1/24} \right[}$$ (dans le cas réel).

Pour $z \in \mathbb{C}$, le domaine est le disque de centre O et de rayon $e^{-1/24}$



$$\mathcal{D} = D(0, e^{-1/24}) = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < e^{-1/24} \}$$

$* \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(2x+1)^{2n}}{3^n+5}$, ici $c_n = \frac{2^{2n}}{3^n+5} > 0$

et la série est centrée sur $a = -1/2$ car

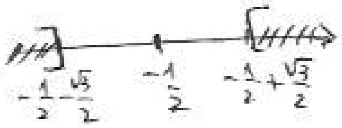
$$(2x+1)^{2n} = 2^{2n}(x+1/2)^{2n} = 2^{2n}\Big[\underbrace{\big(x+\tfrac{1}{2}\big)^2}_{y}\Big]^n .$$

Avec la formule de Cauchy on a :

$$c_n^{1/n} = \frac{2^2}{(3^n+5)^{1/n}} = \frac{4}{3\left(1+\frac{5}{3^n}\right)^{1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4/3 .$$

Appelons ρ le rayon de convergence de la série avec la variable y ; alors $\frac{1}{\rho} = 4/3 \Longrightarrow \boxed{\rho = 3/4}$. La série en x convergera donc absolument pour $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 < 3/4 \iff \left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le rayon sera donc (pour x), $\boxed{R = \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Comme elle est centrée sur $a=-1/2$ alors le domaine de convergence absolue est $\boxed{\left]-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right[}$



---

2. $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, $a_n =$ la $n^{\text{ième}}$ décimale de π

$\pi = 3,1416\ldots$ et donc

$a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 1$; $a_4 = 6 \ldots$

On sait que $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Pour les n tels que $a_n = 0$, $a_n^{1/n} = 0$

et pour ceux où $a_n = 0$, $a_n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln a_n}$, $\frac{\ln a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car $\ln a_n$ est bornée. Donc $\overline{\lim}\, a_n^{1/n} = 1 = \frac{1}{R}$

et donc $\boxed{R = 1}$. Le domaine est $\boxed{]-1,1[}$

3. $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} \cdot x^n$ où $a,b>0$ paramètres.

On a $C_n = \frac{a^n}{1+b^n} > 0 \Rightarrow C_n^{1/n} = \frac{a}{(1+b^n)^{1/n}}$

1er cas : $\boxed{0<b<1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (1+b^n)^{1/n} = 1^0 = 1.$

et donc $\lim_{n\to+\infty} C_n^{1/n} = a = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{R = 1/a}$

Dans ce cas le domaine est $\boxed{\left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[}$

2ème cas : $\boxed{b=1} \Rightarrow b^n = 1, \forall n \Rightarrow C_n^{1/n} = \frac{a}{2^{1/n}}$

et $\lim_{n\to+\infty} C_n^{1/n} = a = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{R = 1/a}$

3ème cas : $\boxed{b>1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$ et donc

$$(1+b^n)^{1/n} = b\left(1+\frac{1}{b^n}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} C_n^{1/n} = \frac{a}{b} = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{R = b/a}$

et le domaine est $\boxed{\left]-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right[}$.

Exercice 2 : $\ast$ Hyp : $\sum c_k x^k$ a pour rayon de convergence R.

On peut traiter la série $\sum c_n x^{2n}$ de deux façons.

1ère façon : On pose $x^2 = y$, alors la série $\sum c_n y^n$ est la série originale, et le rayon est R pour y, càd converge pour $|y|<R$ et diverge pour $|y|>R$. En revenant à x, la série $\sum c_n x^{2n}$ converge pour $|x^2|<R \Leftrightarrow |x|<\sqrt{R}$ et diverge pour $|x|>\sqrt{R}$

Le rayon est donc $\sqrt{R}$.

2ème façon : $\sum c_n x^{2n} = \sum d_k x^k$ où

$$d_k = \begin{cases} c_n & \text{si } k=2n \\ 0 & \text{si } k\neq 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_k^{1/k} = \begin{cases} c_n^{1/2n} & \text{si } k=2n \\ 0 & \text{si } k\neq 2n. \end{cases}$$

et donc $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\, d_k^{1/k} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, c_n^{1/2n} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left(c_n^{-1/n}\right)^{1/2} = \sqrt{R}$.

Pour la série $\sum c_n x^{n^2}$, <u>on ne peut pas</u> appliquer la 1ère façon car il n'y a pas de changement $y = f(x)$ où $y^n = x^{n^2}$. Par contre on peut écrire :

$\sum c_n x^{n^2} = \sum d_k x^k$ où $d_k = \begin{cases} c_n & \text{si } k=n^2 \\ 0 & \text{si } k\neq n^2. \end{cases}$

$$\Rightarrow d_k^{1/k} = \begin{cases} c_n^{\frac{1}{n^2}} & \text{si } k=n^2 \\ 0 & \text{si } k\neq n^2 \end{cases}$$

On sait que $\overline{\lim}\, c_n^{1/n} = 1/R$ donc

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon,\ c_n^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon$

$\Rightarrow c_n^{1/n^2} = \left(c_n^{1/n}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^{1/n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^{1/n} = 1$

donc $\overline{\lim}\, c_n^{1/n^2} \leq 1$. D'autre part, pour une infinité de n, on a $c_n^{1/n} \geq \frac{1}{R} \Rightarrow c_n^{1/n^2} \geq \frac{1}{R^{1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Alors en définitive $\overline{\lim}\, c_n^{1/n^2} = 1$.

Ainsi le rayon de convergence de la série $\sum c_n x^{n^2}$ est $\boxed{R_c = 1}$.

Exercice 3 : $\ast\quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} \cdot x^n$

Ici $C_n = n^{(-1)^n} \geqslant 0$ $\left(C_0 = 0^{(-1)^0} = 0^1 = 0 \right)$ et donc

Pour $n \geqslant 1$, $C_n^{1/n} = n^{(-1)^n/n} = e^{(-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, avec $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le rayon est donc $R=1$, et le domaine de convergence absolue est $D =]-1,1[$. On a :

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k) x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} x^{2k+1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} x^{2k} \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^{2k} dt \right)$$

$$= x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} \right)' + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \right) dt$$

$$= x \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' + \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right)}$$

$\ast\quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n$.

Ici $C_n = \operatorname{ch} n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} = e^n \left(\frac{1+e^{-2n}}{2} \right) > 0$

$$\Rightarrow C_n^{1/n} = \frac{e}{\underbrace{2^{1/n}}_{\to 1}} \big(\underbrace{1 + e^{-2n}}_{\to 1} \big)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e = R^{-1} \Rightarrow \boxed{R = 1/e}$$

Le domaine est $\boxed{D =]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[}$

$$S_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^n + e^{-n}\right)x^n \quad ; \quad |x| < 1/e.$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(ex)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-1}x)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-x/e}\right\}$$

$$= \frac{1 - \frac{e+1/e}{2}x}{1 - x\left(e+\frac{1}{e}\right) + x^2} = \frac{1 - x\,\mathrm{ch}1}{1 - 2x\,\mathrm{ch}1 + x^2}$$

$$\boxed{S_2(x) = \frac{1 - x\,\mathrm{ch}1}{1 - 2x\,\mathrm{ch}1 + x^2}}$$

Exercice 4 : $\times \quad f_p(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-p)} \; ; \; p \in \mathbb{N}^*.$

On commence par décomposer f_p en éléments simples

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{x-k}$$

Il est facile de voir que $\alpha_k = \lim_{x\to k}(x-k)f_p(x)$

Or $(x-k)f_p(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k-1)(x-k-2)\cdots(x-p)}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{1}{(k-1)(k-2)\cdots 1\cdot(-1)(-2)\cdots(k-p)} = \frac{(-1)^{p-k}}{(k-1)!\,(p-k)!}$$

d'où $f_p(x) = \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{p-k}}{(k-1)!\,(p-k)!}\cdot\frac{1}{x-k}$

$$= \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{p-k-1}}{k!\,(p-k)!}\cdot\frac{1}{1-x/k}$$

Chaque terme $\frac{1}{1-x/k}$ est la somme d'une série géométrique dans le domaine $\left|\frac{x}{k}\right| < 1 \iff |x| < k$, donc pour que toutes soient développables, il faut prendre $|x| < 1$.

et on sait que $\frac{1}{1-x/k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{k^n}$.

D'où $f_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{(-1)^{p-k-1}}{k!\,(p-k)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{k^n} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{p-k-1}}{k!\,(p-k)!\,k^n} \right)}_{C_n} x^n}$$

---

* $g_a(x) = \frac{1}{1-2ax+x^2}$; $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On commence par factoriser le trinôme $x^2-2ax+1$:

$\Delta' = a^2 - 1$.

- Si $|a|<1$: $\Delta'<0$, deux solutions complexes conjuguées

$x_1 = \frac{a+i\sqrt{1-a^2}}{1}$; $x_2 = \frac{a-i\sqrt{1-a^2}}{1}$.

Puisque $-1<a<1$, on peut trouver θ tq $a = \cos\theta$, $0<\theta<\pi$

D'où $x_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$x_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

et donc $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (1 - xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})$

Dans ce cas : $g_a(x) = \frac{\alpha}{1-xe^{i\theta}} + \frac{\beta}{1-xe^{-i\theta}}$

on détermine α et β par identification :

$$g_a(x) = \frac{1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} \left[\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}} \right]$$

Rappelons que $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ d'où

$$g_a(x) = \frac{1}{2i\sin\theta} \left[e^{i\theta} \sum_{n\geq 0} x^n e^{in\theta} - e^{-i\theta} \sum_{n\geq 0} x^n e^{-in\theta} \right]$$

$$\Longrightarrow g_a(x) = \frac{1}{2i\sin\theta}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}\right)}_{2i\sin(n+1)\theta} x^n\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{g_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right) x^n}$$

- Si $|a| = 1$:

$\underline{a=1}$: $g_1(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$$

$$\boxed{g_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n} \text{ (on change } n \text{ en } n+1\text{)}.$$

$\underline{a=-1}$: $g_{-1}(x) = \dfrac{1}{1+2x+x^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} = -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n\right) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$$

$$\boxed{g_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n}$$

- Si $|a| > 1$: $\Delta' > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = a - \sqrt{a^2-1} \quad ; \quad x_2 = a + \sqrt{a^2-1}$$

cas $a > 1$: On peut trouver $\theta > 0$ tq $a = \operatorname{ch}\theta$

$$x_1 = \operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta = e^{-\theta} \; ; \; x_2 = \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta = e^{\theta}$$

et donc $x^2 - 2x\operatorname{ch}\theta + 1 = (1 - xe^{\theta})(1 - xe^{-\theta})$

$$g_a(x) = \frac{1}{e^{\theta} - e^{-\theta}}\left[\frac{e^{\theta}}{1 - xe^{\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{1 - xe^{-\theta}}\right] \Bigg/ \text{ on rappelle que } \operatorname{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$g_a(x) = \frac{1}{2\operatorname{sh}\theta}\left[e^{\theta} \sum_{n\geq 0} e^{n\theta} \cdot x^n - e^{-\theta} \sum_{n\geq 0} e^{-n\theta} x^n\right]$$

$$\Rightarrow \quad g_a(x) = \frac{1}{2\,sh\,\theta}\left[\sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(e^{(n+1)\theta} - e^{-(n+1)\theta}\right)}_{2\,sh(n+1)\theta} x^n\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_a(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{sh(n+1)\theta}{sh\,\theta}\right) x^n.}$$

Cas $a < -1$: $\quad -a > 1$ et donc $-a = ch\,\theta$, $\theta > 0$

$$x^2 + 2x\,ch\,\theta + 1 = \left(1 + x e^{\theta}\right)\left(1 + x e^{-\theta}\right)$$

Il suffit de changer x en $-x$ dans la formule obtenue pour $a > 1$:

$$\boxed{g_a(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{sh(n+1)\theta}{sh\,\theta}\right) x^n.}$$

Conclusion :

$$g_a(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right) x^n & \text{si } |a| < 1 \quad (a = \cos\theta,\ 0 < \theta < \pi) \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} (n+1) x^n & \text{si } a = 1 \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) x^n & \text{si } a = -1 \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{sh(n+1)\theta}{sh\,\theta}\right) x^n & \text{si } a > 1 \quad (a = ch\,\theta,\ \theta > 0) \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{sh(n+1)\theta}{sh\,\theta}\right) x^n & \text{si } a < -1 \quad (a = -ch\,\theta,\ \theta > 0) \end{cases}$$

Exercice 5 :
$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n, & \forall n \geq 0 \\ a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = 3 \end{cases}$$

1°/ Calcul de a_2, a_3 et a_4 : $a_2 = 3a_1 + 4a_0 = 9 + 4 = \boxed{13}$

$$a_3 = 3a_2 + 4a_1 = 3 \times 13 + 4 \times 3 = 39 + 12 = \boxed{51}$$
$$a_4 = 3a_3 + 4a_2 = 3 \times 51 + 4 \times 13 = 153 + 52 = \boxed{205}$$

2°/
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$
$$= 1 + 3x + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+2} x^{k+2} \quad (n = k+2)$$
$$= 1 + 3x + \sum_{k=0}^{+\infty} (3a_{k+1} + 4a_k) x^{k+2}$$
$$= 1 + 3x + 3x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} x^{k+1}\right) + 4x^2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)$$
$$= 1 + 3x + 3x[S(x) - 1] + 4x^2 S(x)$$
$$\Rightarrow (1 - 3x - 4x^2) S(x) = 1 \Rightarrow \boxed{S(x) = \frac{1}{1 - 3x - 4x^2}}$$

3°/ Développement de $S(x)$: $S(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1-4x)} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{4}{1-4x}\right]$

$$S(x) = \frac{1}{5}\left[\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n + \sum_{n \geq 0} 4^{n+1} x^n\right]$$
$$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n + 4^{n+1}}{5}\right) x^n$$

Par identification : $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^n + 4^{n+1}}{5}}$

Vérifions pour $n = 3$:
$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 4^4}{5} = \frac{-1 + 256}{5} = \frac{255}{5} = 51 \,!$$