Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Déterminer le domaine de convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$u_n(x) = \frac{1-x}{x^n} \quad , \quad v_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln x}} \quad , \quad w_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^a} \quad , \quad z_n(x) = \frac{n^n}{x^{n^n}}$$

Exercice 2 : Après avoir établi la convergence simple, étudier la convergence normale, puis uniforme de chacune des séries suivantes dans le domaine indiqué :

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{\ln n} \;\; x \in [0,1] \quad , \quad v_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)} \;\; x \geq 0 \;\text{ puis }\; x \geq a > 0$$

Exercice 3 : On pose

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 \ln n}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = [0, +\infty[$ et que c'est son domaine de définition.
2. Montrer qu'elle est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer qu'elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 : En appliquant les opérations de dérivation et/ou intégration à des séries géométriques, calculer les sommes suivantes en justifiant tous les calculs :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \quad , \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad , \quad A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n} \quad , \quad B = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)4^n}$$

Exercice 5 : Montrer que pour tout paramètre réel $a > 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$$

Quels résultats peut-on obtenir dans les cas $a = 1$, $a = 2$ et $a = 3$.

$2^{\text{ème}}$ année de Licence de Mathématiques – Semestre 3 – 2021/2022.
Module : « Analyse III » – Liste de T.D N° 2 – Corrigé.

Exercice 1 : $\times$ $u_n(x) = \dfrac{1-x}{x^n}$, $n \geq 0$, $x \neq 0$.

Pour déterminer le domaine de convergence simple de la série $\sum u_n(x)$ on étudie la convergence pour x fixé (considéré comme paramètre).
On peut commencer par la convergence absolue, en appliquant le critère de d'Alembert à $|u_n(x)|$:

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|\cancel{1-x}|}{|x|^{n+1}} \cdot \frac{|x|^n}{|\cancel{1-x}|} = \frac{1}{|x|} \quad \text{pour } x \neq 0, 1.$$

et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{1}{|x|}$.

- Si $\dfrac{1}{|x|} < 1 \iff |x| > 1$; alors la série est absolument convergente donc convergente.
- Si $\dfrac{1}{|x|} > 1 \iff |x| < 1$, alors il n'y a pas de convergence absolue.
  Voyons s'il y a convergence quand même, sans être absolue.
  Comme $|x| < 1$ (et $x \neq 0$) $\iff x \in]-1,0[\cup]0,1[$.
  1^er^ sous-cas : $x \in]0,1[$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln x} = 0^+$
  et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty \neq 0$. Donc la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite. Il y a divergence.
  2^ème^ sous-cas : $x \in]-1,0[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-x)^n = 0^+$, d'où
  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x}{(-1)^n \cdot (-x)^n}$ n'existe pas à cause de $(-1)^n$.
  Là aussi il y a divergence.
- Si $|x| = 1$. Ici le critère de d'Alembert appliqué à $|u_n(x)|$ cesse de fonctionner.

Deux sous-cas se présentent : $x=1$ et $x=-1$.

• $\underline{x=1}$: $u_n(1)=0$, donc $\sum u_n(1)$ converge.

• $\underline{x=-1}$: $u_n(-1)=\frac{2}{(-1)^n}=2(-1)^n$ n'a pas de limite qd $n\to+\infty$

et donc puisque la condition nécessaire n'est pas satisfaite, la série diverge.

<u>Conclusion</u>: Cette série converge pour $|x|>1$ et pour $x=1$.

Ainsi $\boxed{S=]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[}$

$*$ $v_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln x}}$, $n\geq 1$ et $x>0$.

On peut, comme la série précédente, commencer par la convergence absolue. Mais vu l'expression de $v_n(x)$, on voit tout de suite qu'il est préférable de faire appel au critère de Leibniz (ou Abel) à cause de $(-1)^{n-1}$, puisque c'est une série alternée ($n^{\ln x}>0$).

• On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\ln x}}=\begin{cases}0 \text{ si } \ln x>0\\ 1 \text{ si } \ln x=0\\ +\infty \text{ si } \ln x<0\end{cases}=\begin{cases}0 \text{ si } x>1\\ 1 \text{ si } x=1\\ +\infty \text{ si } 0<x<1.\end{cases}$

On peut tout de suite évacuer les cas $x=1$ et $0<x<1$. En effet : $v_n(1)=(-1)^{n-1}$, la série diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n(1)$ n'existe pas ;

et si $0<x<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n(x)$ n'existe pas non plus car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\ln x}}=+\infty$.

Donc la série diverge pour $0<x\leq 1$. Reste seulement le cas $x>1$.

Il faut s'assurer que la suite $\frac{1}{n^{\ln x}}$ est <u>décroissante</u>. Considérons la fonction $h(t)=\frac{1}{t^{\ln x}}=t^{-\ln x}$, $t\in[1,+\infty[$. On a $h'(t)=(-\ln x)(t^{-\ln x-1})<0$ car $t^{-\ln x-1}>0$ et $\ln x>0$. Ainsi on peut appliquer le critère de Leibniz dans ce cas.

En définitive : $\boxed{S=]1,+\infty[}$

$* \; w_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^a}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ paramètre.

Il est facile de voir que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Nous avons un cas évident où $x = 0$, $w_n(0) = 0$ et la série converge. $\forall a \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $w_n(x) > 0$ et $w_n(x) \sim \dfrac{\pi/2}{n^a}$ $(n \to +\infty)$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et ssi $a > 1$.

Pour $x < 0$, $w_n(x) < 0$ et $-w_n(x) > 0$, de plus $-w_n(x) \sim \dfrac{\pi/2}{n^a}$, elle convergera donc pour $a > 1$. Appelons $\mathcal{S}_a$ le domaine de convergence. Alors

- Si $a > 1$, $\mathcal{S}_a = \mathbb{R}$
- Si $a \leq 1$, $\mathcal{S}_a = \{0\}$.

$* \; Z_n(x) = \dfrac{n^n}{x^{n^n}}$, $n \geq 1$ et $x \neq 0$

On a $|Z_n(x)| = \dfrac{n^n}{|x|^{n^n}} = n^n \cdot |x|^{-n^n} \Rightarrow |Z_n(x)|^{1/n} = n \, e^{-n^{n-1} \cdot \ln|x|}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} |Z_n(x)|^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ +\infty & \text{si } |x| \leq 1 \quad (x \neq 0). \end{cases}$

D'après le critère de Cauchy, la série converge absolument si $|x| > 1$. Pour $|x| \leq 1$, il n'y a pas de convergence absolue. Il n'y a pas de convergence (tout court) non plus car soit

$$\cdot \lim_{n \to +\infty} Z_n(x) = +\infty \neq 0 \quad \text{si } 0 < x \leq 1$$

soit $\lim\limits_{n \to +\infty} Z_n(x)$ n'existe pas pour $-1 \leq x < 0$.

En définitive le domaine de convergence simple est

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

Exercice 2 : $\quad * \; u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{\ln n} \quad , \; x \in [0,1] \; , \; n \geq 2$

- On peut établir la convergence simple de la façon suivante.

$|u_n(x)| = \dfrac{x^n}{\ln n} \Rightarrow |u_n(x)|^{1/n} = \dfrac{x}{(\ln n)^{1/n}} = x \underbrace{e^{-\frac{1}{n}\ln(\ln n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)|^{1/n} = x$. Donc si $0 \leq x < 1$, il y a convergence absolue d'après le critère de Cauchy. Reste le cas $x = 1$.

On a $u_n(1) = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$. On fait appel au critère de Leibniz.

Soit $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$, $t \in [2, +\infty[$. On a $\varphi'(t) = \dfrac{-1}{t \ln^2(t)} < 0$

Donc la suite $\dfrac{1}{\ln n}$ est décroissante, positive et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$.

- Convergence normale : $|u_n(x)| = \dfrac{x^n}{\ln n}$ est une fonction de x croissante sur $[0,1]$ donc $\boxed{\sup\limits_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{\ln n}}$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{\ln n}$ diverge comme série de Bertrand avec $\alpha = 0$, $\beta = 1$. (div si $\alpha \leq 1$ ou $\alpha = 1, \beta \leq 1$)

Donc pas de convergence normale.

- Voyons s'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.

On peut utiliser le critère de Leibniz (ou Abel) uniforme.

Posons $\xi_n(x) = \dfrac{x^n}{\ln n}$. On a $\xi_n(x) \geq 0$. De plus $\sup\limits_{[0,1]} \xi_n(x) = \dfrac{1}{\ln n}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{[0,1]} \xi_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$. Reste la décroissance en n de $\xi_n(x)$. Posons $\psi(t) = \dfrac{x^t}{\ln t} = e^{t\ln x} / \ln t$.

$\psi'(t) = \left[(\ln x) x^t \ln t - \dfrac{1}{t} x^t\right] / \ln^2 t = \dfrac{x^t}{t \ln^2 t}\left[t \ln t \ln x - 1\right]$

Posons $f(t) = t \ln t \ln x - 1$. $f'(t) = (\ln x)[1 + \ln t] \leq 0$. $f(2) = 2\ln 2 \ln x - 1$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

La fonction $f(t)$ devient donc <0 à partir d'une certaine valeur de $t \geq 2$ assez grande. Càd, $\varphi(x)$ est décroissante pour t assez grand, ou encore $\xi_n(x)$ est décroissante à partir d'un certain n_0. On vient de satisfaire toutes les conditions du critère d'Abel uniforme. Donc la série converge uniformément sur $[0,1]$.

$\ast$ $V_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$, $x \geq 0$, $n \geq 1$.

- Si $x=0$, $V_n(0) = \dfrac{1}{n}$, la série diverge (Riemann avec $\alpha=1$).
- Si $x>0$, $V_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2 x}$ $(n \to +\infty)$, il y a convergence car $\sum \frac{1}{n^2}$ cvg.

Le domaine de convergence simple est $\boxed{\mathcal{S} =]0,+\infty[}$.

- Examinons la convergence normale sur $\mathcal{S}$. $V_n'(x) = \dfrac{-n}{n(1+nx)^2} < 0$

donc $V_n(x)$ est décroissante en x, d'où puisque $V_n(x) \geq 0$,

$\sup\limits_{]0,+\infty[} V_n(x) = V_n(0) = \dfrac{1}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc

On n'a pas de convergence normale sur $]0,+\infty[$.

- Pour voir la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$, on fait appel à la condition "suite de Cauchy" pour $V_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)}$.

On a $V_{n+p}(x) - V_p(x) = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{p+n} \frac{1}{k(1+kx)}$ et cette fonction de x est ≥ 0 décroissante donc $\sup\limits_{]0,+\infty[} V_{n+p}(x) - V_p(x) = V_{n+p}(0) - V_p(0) = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k}$.

Or $\displaystyle\lim_{n,p \to \infty} \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k} = +\infty$ car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Donc on n'a pas non plus de convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Voyons maintenant les convergences normale et uniforme sur un intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$ fixé. $]0 \quad [a \quad +\infty$

D'après ce qui précède :

$$\sup_{[a,+\infty[} v_n(x) = v_n(a) = \frac{1}{n(1+na)} \sim \frac{1}{a.n^2}, \ (n\to+\infty)$$

Donc il y a bien convergence normale sur $[a,+\infty[$, et ceci implique qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 3 : $\quad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 \ln n}$

1/ $\mathcal{D}_f = [0,+\infty[$: Pour montrer que $[0,+\infty[$ est le domaine de f il faut montrer que la série converge simplement pour tout $x\geq 0$ et qu'elle diverge pour tout $x<0$.

Posons $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 \ln n}$. $(n\geq 2)$.

- Pour $x=0$: $u_n(0) = \frac{1}{n^2 \ln n}$, c'est le terme général d'une série de Bertrand convergente ($\alpha = 2 > 1$).
- Pour $x>0$: comme $u_n(x)>0$, on peut utiliser le critère de Cauchy :

$$u_n(x)^{1/n} = \frac{e^{-x}}{n^{2/n}(\ln n)^{1/n}} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{-\frac{2}{n}\ln n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{n}\ln(\ln n)}}_{\to 1} \quad (n\to+\infty)$$

et $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)^{1/n} = e^{-x} < 1$ (car $x>0$)

donc la série converge simplement $\forall x>0$.

- Pour $x<0$: $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 \ln n} = +\infty$ car $e^{-nx} (\to+\infty)$ domine le terme $n^2 \ln n$. Ainsi la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite, la série diverge.

2°/ Continuité de f sur D_f : il est clair que les fonctions $u_n(x)$ sont toutes continues sur $D_f = [0,+\infty[$; pour récupérer la continuité de la somme $f(x)$, il suffit d'établir la continuité uniforme de la série sur $[0,+\infty[$. On peut commencer par examiner la convergence normale sur $[0,+\infty[$ cela impliquerait la convergence uniforme. On a

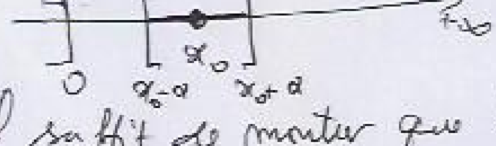
$$u_n'(x) = \frac{-n\,e^{-nx}}{n^2 \ln n} < 0 \quad \text{donc la fonction } u_n(x)$$

est décroissante sur $[0,+\infty[$, cela veut dire que

$$\sup_{[0,+\infty[} u_n(x) = u_n(0) = \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ est convergente, donc $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, ce qui implique sa convergence uniforme.

3°/ Dérivabilité de f sur $]0,+\infty[$. On commence par rappeler que la dérivation (en un point $x_0 > 0$) est une opération locale, càd ne fait intervenir que les x voisins de x_0. Fixons donc $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$ (petit) tel que $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset]0,+\infty[$.



D'après le cours, il suffit de montrer que la série $\sum u_n'(x)$ converge uniformément sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$. Nous allons montrer qu'elle converge normalement sur cet intervalle.

$$|u_n'(x)| = \frac{n\,e^{-nx}}{n^2 \ln n} = \frac{e^{-nx}}{n \ln n} \leq \frac{e^{-n(x_0-\alpha)}}{n \ln n}.$$

Donc $\sup_{[x_0-\alpha, x_0+\alpha]} |u_n'(x)| \leq \frac{e^{-n(x_0-\alpha)}}{n \ln n}$. Il est facile de voir que la série majorante $\sum \frac{e^{-n(x_0-\alpha)}}{n \ln n}$ est convergente. D'où le résultat.

On peut donc affirmer (selon un théorème du cours) que f est dérivable au point x_0 et $f'(x_0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-e^{-nx_0}}{n \ln n}$.

Comme x_0 est quelconque dans $]0,+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 : x $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

On démarre de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in]-1,1[$ (convergence triple)

On remarque que la série des dérivées $\sum n x^{n-1}$, possède la qualité que $\sup_{[-a,a]} |n x^{n-1}| = n a^{n-1}$, $0<a<1$

et $\sum n a^{n-1}$ converge car par le critère de Cauchy $\left(n a^{n-1}\right)^{1/n} = n^{1/n} \cdot a^{1-1/n}$, $n^{1/n} \to 1$, $a^{1-1/n} \to a$

on a $\lim_{n\to+\infty} \left(n a^{n-1}\right)^{1/n} = a < 1$. Donc la série géométrique est dérivable sur $]-1,1[$. On peut montrer qu'elle est dérivable deux fois (même raisonnement). On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(x f'(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x\left[x f'(x)\right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

d'où $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$ $\forall x \in]-1,1[$.

* $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. On peut écrire :

$$S_2(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \implies x\, S_2(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On montre, comme auparavant, que cette dernière série est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$. On en déduit :

$$\left[x\, S_2(x^2)\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\implies \left[x\, S_2(x^2)\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right), \ \forall x \in]-1,1[.$$

$$\implies x\, S_2(x^2) = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$\implies S_2(x^2) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ \forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}$$

avec $S_2(0) = 1$.

Si $x > 0$, alors $x = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ et donc

$$S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right), & \forall x \in]0,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si $x < 0$: On reprend du début en écrivant $x = -t$, $t > 0$

Alors $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1} = g(t) \implies t\,g(t^2) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$

$$\implies \left[t\,g(t^2)\right]' = \sum_{n\geq 0} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow t\,g(t^2) = \operatorname{arctg} t$$

$$\implies g(t^2) = \frac{1}{t}\operatorname{arctg}(t) \implies g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{arctg}(\sqrt{t})$$

et donc dans ce cas :

$$S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{arctg}(\sqrt{-x}), & \forall x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

* $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$. On considère la série de fonctions $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ $x \in]-1,1[$. car

$A = H(1/3)$. On a $H'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}$

$\Rightarrow x^2 H'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow [x^2 H'(x)]' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$

càd $[x^2 H'(x)]' = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$.

$\Rightarrow x^2 H'(x) = -\ln(1-x) - x$

$\Rightarrow H'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. $(H'(0) = 1/2)$

$\Rightarrow H(x) = -\ln|x| - \int \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx + C$

On calcule l'intégrale indéfinie par partie : $\begin{cases} u = \ln(1-x) \; ; \; u' = \frac{-1}{1-x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \; , \; v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Alors $\int \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{1}{(1-x)\,x}dx$

$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\right]dx$

$= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \ln(1-x) - \ln|x|$

Enfin $H(x) = -\cancel{\ln|x|} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + \cancel{\ln|x|} + C$

$= \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x) + C = (1-x)\frac{\ln(1-x)}{x} + C$

Pour calculer C on a : $H(0) = 0 = \lim_{x \to 0} H(x) = -1 + C \Rightarrow C = 1$

et donc $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1$

D'où $A = H(1/3) = \frac{(1-1/3)\ln(1-1/3)}{1/3} + 1 = 1 + 2\ln(2/3)$.

$$\boxed{A = 1 + 2\ln(2/3)}$$

* $B = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)4^n}$. On considère la série

$$G(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$$ qui converge dans $]-1,1[$.

et on aura $G(1/4) = B$!

$$G(x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] x^n$$

① D'une part si $G_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n$, alors

$$\frac{G_1(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} \Rightarrow \left[\frac{G_1(x)}{x}\right]' = \sum_{n\geq 2} (-1)^{n+2} x^{n-2} = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{G_1(x)}{x} = \ln(1+x) \Rightarrow G_1(x) = x\ln(1+x)$$

et d'autre part si $G_2(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$, alors

$$x\,G_2(x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \left[x\,G_2(x)\right]' = \sum_{n\geq 2} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} - (1-x)$$

$$\Rightarrow x\,G_2(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow G_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 + \frac{x}{2}$$

D'où

$$G(x) = \frac{1}{2}G_1(x) - \frac{1}{2}G_2(x)$$

$$G(x) = \frac{x}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x}\ln(1+x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(1+x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

Ainsi $B = G\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}$

$$\boxed{B = \frac{7}{16} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{5}{4}\right)}.$$

Exercice 5 : $\forall a>0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$?

Partons de la somme partielle d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{n} q^k + \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Prenons $q=-x^a$ avec $x\in]0,1]$ ($a>0$ fixé) ; d'où

$$\frac{1}{1+x^a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{ka} + (-1)^{n+1}\frac{x^{a(n+1)}}{1+x^a}.$$

Intégrons cette égalité de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{ka}\,dx + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{a(n+1)}}{1+x^a}\,dx}_{R_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{ka+1}}{ka+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1} R_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+ka} + (-1)^{n+1} R_n.$$

Examinons R_n : On a $\displaystyle\frac{x^{a(n+1)}}{1+x^a} = \frac{x^a}{1+x^a}\cdot x^{an} \leq x^{an}$

$$\Rightarrow R_n \leq \int_0^1 x^{an}\,dx = \frac{1}{1+an}$$

d'où $\displaystyle |(-1)^{n+1}R_n| \leq \frac{1}{1+an} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

D'où le résultat.

Cas particuliers : * $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 \quad (a=1)$

* $a=2$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+2k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \pi/4.$

* $a=3$: On a : $\displaystyle\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right]$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$$

d'où $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

et donc :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3}) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3}).$$

On a $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin \pi/6}{\cos \pi/6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$

En définitive :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \pi\sqrt{3}/3}$$