Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 :

1. On donne les termes généraux des séries numériques suivantes :

$$u_n = \frac{4n-3}{2n+1} \quad , \quad v_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Écrire *in extenso* les sommes partielles U_3 , U_5 , V_4 , V_5.

2. Inversement, pour les sommes écrites *in extenso* suivantes, trouver l'expression du terme général de la série correspondante

$$\frac{5}{1.2} + \frac{8}{2.3} + \frac{11}{3.4} + \frac{14}{4.5} + \cdots \quad , \quad \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \cdots$$

Exercice 2 : En utilisant le critère adéquat, étudier la convergence de la série de terme général donné par :

$$u_n = \frac{n^n}{n!} \quad , \quad v_n = e^{-\lambda n} \quad , \quad x_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad , \quad y_n = \frac{1}{n^a \ln n}$$

où λ et a sont deux paramètres réels.

Exercice 3 : Étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence éventuelle des séries suivantes données par leurs termes généraux

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3+2} \quad , \quad b_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad , \quad c_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}$$

Exercice 4 : Étudier la convergence des séries suivantes, puis dans le cas où une série est convergente, calculer sa somme

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad , \quad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad w_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

Exercice 5 : Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Reprenez le même exercice avec $\sum u_n$ et $\sum w_n$ où $w_n = \inf(1, u_n)$.

Exercice 6 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positif convergente. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente aussi. (Indication : utiliser le fait que $\left(\sqrt{u_n} - \dfrac{1}{n}\right)^2 \geq 0$)

2$^{\text{ème}}$ année de Licence de Mathématiques - S3 - 2021/2022.
Module : « Analyse III » - Corrigé de la liste de T.D. 1

Exercice 1 : * Soit $u_n = \frac{4n-3}{2n+1}$, $n \geq 0$.

En appliquant juste la définition on a :

$$U_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \frac{-3}{1} + \frac{1}{3} + \frac{5}{5} + \frac{9}{7}$$

$$U_5 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = -3 + \frac{1}{3} + \frac{5}{5} + \frac{9}{7} + \frac{13}{9} + \frac{17}{11}.$$

* Pour $v_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \geq 0$. On aura

$$V_4 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}.$$

$$V_5 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120}$$

* Soit l'écriture in extenso : $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{8}{2 \cdot 3} + \frac{11}{3 \cdot 4} + \frac{14}{4 \cdot 5} + \cdots$

Les numérateurs sont : 5, 8, 11, 14. Ils forment une progression arithmétique de raison 3 car $8-5 = 11-8 = 14-11 = 3$.
Donc les numérateurs sont de la forme $3n+5$, $n \geq 0$.
Les dénominateurs sont : 1.2, 2.3, 3.4, 4.5. Ce sont les produits de deux entiers consécutifs à commencer par 1.2, donc il sont de la forme : $(n+1)(n+2)$, $n \geq 0$.

Ainsi la forme du terme général est : $\boxed{u_n = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)} \quad n \geq 0}$

* Pour la série : $\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \cdots$

$$\boxed{v_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2}{3^n}, \quad n \geq 1}$$

Exercice 2: $\ast\ u_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $n \geq 1$

La structure de "u_n" est multiplicative: $n^n = \underbrace{n.n.n\dots n}_{n \text{ fois}}$

et $n! = n.(n-1)(n-2)\dots 2.1.$

Ceci nous suggère d'utiliser le critère de d'Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!} \cancel{(n+1)} \cdot n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Reste à calculer la limite quand $n \to +\infty$. Rappelons le développement limité, quand $x \to 0$, de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x + O(x^2) \quad (\text{ordre } 1).$$

D'où $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O(1/n^2)$, $(q^d\ n \to +\infty)$

$$\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + O(1/n)$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1}$

Donc la série $\sum \frac{n^n}{n!}$ est <u>divergente</u>.

$\ast\ v_n = e^{-\lambda n}$, $n \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre.

. On remarque que $v_n = (e^{-\lambda})^n$, c'est une série géométrique de raison $q = e^{-\lambda}$. Donc il y aura convergence si et ssi $e^{-\lambda} < 1$ càd $-\lambda < \ln 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda > 0}$.

. On peut aussi appliquer le critère de Cauchy: $v_n^{1/n} = e^{-\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$.

et on aura la même conclusion: convergence si $\lambda > 0$ et divergence si $\lambda < 0$. Pour $\lambda = 0$, $u_n = 1$ $\Rightarrow \sum u_n$ divergence car $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$.

* $x_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $n \geq 1$.

A partir du développement limité de $\ln(1+x)$, $x\to 0$ on déterminera un équivalent de x_n (qd $n\to+\infty$):

On a à l'ordre 1 : $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ $(x\to 0)$

d'où $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + O(1/n)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{x_n} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + O(1/n^2) = \frac{1}{n^{3/2}} + O(1/n^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{n^{3/2} x_n = 1 + O(1/\sqrt{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^{3/2} x_n = 1 \Longrightarrow \boxed{x_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}}$$

Il y a équivalence avec une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente car $\frac{3}{2} > 1$. Donc $\sum x_n$ est convergente.

---

* $y_n = \frac{1}{n^a \ln n}$, $n \geq 2$; $a \in \mathbb{R}$ un paramètre.

i/ En faisant $n^a y_n = \frac{1}{\ln n}$, on aura $\lim_{n\to+\infty} n^a y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

Donc pour n assez grand ($n \geq n_0$) on peut écrire

$$n^a y_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{y_n \leq \frac{1}{n^a} \quad (n\geq n_0)}$$

Il est clair que $y_n > 0$. On peut appliquer la comparaison.

Si $a > 1$, la série majorante $\sum \frac{1}{n^a}$ est de Riemann convergente, donc $\sum y_n$ est convergente dans ce cas.

ii/ Supposons maintenant $a < 1$. Alors $n y_n = \frac{n^{1-a}}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ($1-a>0$)

Donc pour $n \geq n_1$ (assez grand), on aura $n y_n \geq 1 \Rightarrow \boxed{y_n \geq \frac{1}{n}}$

La série minorante $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. (Riemann avec $\alpha = 1$)

Donc $\sum y_n$ est divergente dans ce cas.

iii/ Il reste le cas $a=1$: $y_n = \frac{1}{n \ln n}$.

On peut dans ce cas s'inspirer de la démonstration donnée pour la série de Riemann. Considérons la fonction réelle :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x \in [2, +\infty[.$$

$$f'(x) = \frac{-[1+\ln x]}{x^2 \ln^2 x} < 0 \text{ car } \ln x \geq \ln 2 \text{ et } 1+\ln x \geq 1+\ln 2 > 0.$$

La fonction f étant décroissante, on peut écrire :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{x \ln x} \leq \frac{1}{k \ln k}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \Big[\ln(\ln x)\Big]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k \ln k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- Si $k=2$: $\frac{1}{3 \ln 3} \leq \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) \leq \frac{1}{2 \ln 2}$
- Si $k=3$: $\frac{1}{4 \ln 4} \leq \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) \leq \frac{1}{3 \ln 3}$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

- Si $k=n$: $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n \ln(n)}$

Faisons la somme de toutes les inégalités, Posons $\boxed{U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}}$

Alors : $\boxed{U_{n+1} - \frac{1}{2\ln 2} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq U_n}$

D'après l'inégalité encadrée, $\ln(\ln(n+1)) \leq U_n + \ln(\ln 2)$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

La série est alors divergente.

Conclusion: La série $\sum \frac{1}{n^a \ln n}$ est :

- Convergente si $a > 1$
- Divergente si $a \leq 1$.

Remarque : Cette série fait partie des séries dites de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

On peut montrer comme on vient de le faire, qu'elles convergent si $(a > 1)$ ou $(a = 1$ et $b > 1)$.

Exercice 3 : $\ast$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3+2}$, $n \geq 0$.

On a : $|a_n| = \frac{1}{n^3+2} \sim \frac{1}{n^3}$, il y a équivalence avec une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ $(3>1)$ convergente, donc $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente aussi.

$\ast$ $b_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, $|b_n| = \frac{\ln n}{n}$, $n \geq 1$.

$\sum \frac{\ln n}{n}$ est divergente, on peut évoquer une série de Bertrand avec $a = 1$ et $b = -1$. Ou bien reprendre une démonstration pareille au cas $\sum y_n$ précédent. En effet si $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0$ sur $[1, +\infty[$. Donc si $x \in [k, k+1]$, $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln k}{k}$.

$$\Rightarrow \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k} \Rightarrow \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \left[\frac{1}{2} \ln^2 x\right]_k^{k+1} \leq \frac{\ln k}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{1}{2}\left[\ln^2(k+1) - \ln^2 k\right] \leq \frac{\ln k}{k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Si on pose $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ alors $B_{n+1} - \underbrace{\frac{\ln 1}{1}}_{0} \leq \boxed{\frac{1}{2}\left[\ln^2(n+1)\right] \leq B_n}$

et donc $\lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty$, La série n'est pas absolument convergente.

On examine maintenant la convergence à la lumière du critère d'Abel. On a $b_n = \underbrace{(-1)^n}_{\alpha_n} \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\beta_n}$, $n \geq 1$.

- Pour la suite α_n on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right| = \left|(-1)+(1)+(-1)+\dots+(-1)^n\right| \leq 1$
- Pour la suite $\beta_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$, décroissante car la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ étudiée précédemment est décroissante et enfin $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Donc le critère d'Abel s'applique, et la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge. Elle est ainsi semi-convergente.

Rque : Si le terme général d'une série $u_n = (-1)^n \cdot \beta_n$ on dit qu'elle est alternée. Si $\beta_n \geq 0$, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, alors elle converge d'après le critère d'Abel. On ne vérifie pas la propriété de $(-1)^n$ car elle reste toujours vraie. Ce critère porte parfois le critère de Leibniz. On vérifie seulement les propriétés du morceau β_n.

$*$ $C_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ paramètre.

Nous n'allons pas étudier la convergence absolue car elle dépasse le cadre de la deuxième année. Par contre pour la convergence, on applique le critère d'Abel : $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$ est ≥ 0, $\searrow$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et pour $\beta_n = \cos n\theta$ on a $\left|\sum_{k=1}^{n} \beta_k\right| \leq \frac{2}{|\sin \theta/2|}$, donc il y a convergence pour toute valeur de $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ($\theta \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$!).

Exercice 4 : $\ast\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$.

i/ Convergence : On peut appliquer le critère de Riemann. En effet

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)} = 1 \text{ donc } u_n \sim \frac{1}{n^3} \ (n\to+\infty)$$

et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (car c'est une série de Riemann, $\alpha = 3 > 1$).

ii/ Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$? On fait d'abord la décomposition en éléments simples de la fraction u_n :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Par identification on obtiendra :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2. \\ b+c = -1/2 \\ 2b+c = -3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1 \\ c = +1/2 \end{cases}$$

Donc $u_n = \dfrac{1/2}{n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1/2}{n+2}$

Posons $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right]$$

$$U_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right]$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{4}$, D'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = S = \frac{1}{4}}$

* $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n \geq 2$.

i/ Convergence : On peut utiliser l'équivalence, mais pour cela, il faut que $v_n \geq 0$? Mais ce n'est pas vrai.
Toutefois $\forall n \geq 2$, $v_n < 0$ (car $1 - \frac{1}{n^2} < 1 \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$).
et donc $-v_n > 0$. On cherche un équivalent à $-v_n$.
Partons du développement limité de $\ln(1-x)$, $(x \to 0)$.

$$\ln(1-x) = -x + O(x^2) \Rightarrow -\ln(1-x) = x + O(x^2)$$

d'où $-v_n = \frac{1}{n^2} + O(1/n^4)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2(-v_n) = 1$
càd $(-v_n) \sim \frac{1}{n^2}$ qui converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum(-v_n)$ converge et donc $\sum v_n$ converge.

ii/ Calcul de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n$? $v_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left[\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right]$

$$\Rightarrow v_n = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n \quad (n \geq 2).$$
$$= [\ln(n-1) - \ln n] - [\ln n - \ln(n+1)].$$

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \{[\ln(k-1) - \ln k] - [\ln k - \ln(k+1)]\}$$
$$= \{[\underbrace{\ln 1}_{0} - \cancel{\ln 2}] + [\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}] + \dots + [\cancel{\ln(n-1)} - \ln n]\} -$$
$$- \{[\ln 2 - \cancel{\ln 3}] + [\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4}] + \dots + [\cancel{\ln n} - \ln(n+1)]\}.$$

$$V_n = -\ln n - \ln 2 + \ln(n+1) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\ln 2$, donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2}$$

* $w_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$, $n \geq 2$.

i/ Convergence : Vérifions que c'est une série alternée. Posons $\theta_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. $\theta_n > 0$ car $n+1 > n-1 \Rightarrow \frac{n+1}{n-1} > 1$.

Pour prouver la convergence on peut utiliser le critère de Leibniz (cas particulier du critère d'Abel). Montrons que θ_n est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$. Pour la limite on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right) = \ln 1 = 0$.

Examinons la décroissance. Posons $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ avec $x \in [2, +\infty[$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{x^2-1} < 0$

car sur l'intervalle $[2, +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$ ($\underset{-1}{+}\ \underset{1}{-}\ \underset{2}{+}$ $\rightarrow$).

Donc la suite $\theta_n = f(n)$ est décroissante.

ii/ Calcul de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} w_n$? $w_n = (-1)^n \left[\ln(n+1) - \ln(n-1)\right]$

$$W_n = \sum_{k=2}^{n} w_k = \sum_{k=2}^{k} (-1)^k \left[\ln(k+1) - \ln(k-1)\right]$$

$$W_n = [\ln 3 - \underbrace{\ln 1}_{0}] - [\ln 4 - \ln 2] + [\ln 5 - \ln 3] - [\ln 6 - \ln 4]$$
$$+ \cdots + (-1)^n \left[\ln(n+1) - \ln(n-1)\right]$$

$$W_n = \ln 2 + (-1)^{n-1} \ln n + (-1)^n \ln(n+1)$$
$$= \ln 2 + (-1)^n \left[\ln(n+1) - \ln n\right] = \ln 2 + \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 0}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ln 2$ et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln 2}$$

Exercice 5 : * $u_n > 0$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Il s'agit de montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, càd convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

1ère cas : Supposons $\sum u_n$ converge. Alors par la condition nécessaire $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1$

càd $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et comme la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum v_n$ converge.

2ème cas : Supposons maintenant $\sum v_n$ converge. Un calcul simple donne $v_n + u_n v_n = u_n \Rightarrow v_n = u_n(1-v_n) \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{v_n}{1-v_n}}$

Comme on a supposé $\sum v_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-v_n} = 1 \Rightarrow u_n \sim v_n$.

---

* $u_n >$ et $w_n = \inf(1, u_n)$.

1er cas : Supposons $\sum u_n$ converge. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc pour n assez grand $(n \geq n_0)$ on aura $u_n < 1 \Rightarrow w_n = u_n$ d'où $\sum w_n$ converge aussi.

2ème cas ; Supposons $\sum u_n$ diverge. Deux cas peuvent se présenter.

1er sous-cas : $\forall n$, $u_n \leq 1 \Rightarrow w_n = u_n$ et donc $\sum w_n$ diverge.

2ème sous-cas : Il existe une infinité de n_k tq $u_{n_k} > 1$.

Donc il existe une sous-suite $w_{n_k} = 1 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} w_{n_k} = 1$.

d'où $\lim_{n\to+\infty} w_n \neq 0 \Rightarrow \sum w_n$ diverge.

Exercice 6 : Hypothèses : * $u_n \geq 0$ et * $\sum u_n$ converge.

Problème : Si $v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ alors $\sum v_n$ converge aussi ?

D'après l'indication on a : $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$ (évident)

$$\Rightarrow u_n + \frac{1}{n^2} - 2\underbrace{\frac{\sqrt{u_n}}{n}}_{v_n} \geq 0 \Rightarrow u_n + \frac{1}{n^2} \geq 2v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n \leq \frac{1}{2}\left[u_n + \frac{1}{n^2}\right]}$$

Par hypothèse $\sum u_n$ converge. De plus $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. D'où $\sum \left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ converge. Elle majore la série de terme général v_n, donc $\sum v_n$ converge par le critère de comparaison.