

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2021/2022 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 :

1. On donne les termes généraux des séries numériques suivantes :

$$u_n = \frac{4n-3}{2n+1} \quad , \quad v_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Écrire *in extenso* les sommes partielles U_3 , U_5 , V_4 , V_5 .

2. Inversement, pour les sommes écrites *in extenso* suivantes, trouver l'expression du terme général de la série correspondante

$$\frac{5}{1.2} + \frac{8}{2.3} + \frac{11}{3.4} + \frac{14}{4.5} + \dots \quad , \quad \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots$$

Exercice 2 : En utilisant le critère adéquat, étudier la convergence de la série de terme général donné par :

$$u_n = \frac{n^n}{n!} \quad , \quad v_n = e^{-\lambda n} \quad , \quad x_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad , \quad y_n = \frac{1}{n^a \ln n}$$

où λ et a sont deux paramètres réels.

Exercice 3 : Étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence éventuelle des séries suivantes données par leurs termes généraux

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3 + 2} \quad , \quad b_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad , \quad c_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}$$

Exercice 4 : Étudier la convergence des séries suivantes, puis dans le cas où une série est convergente, calculer sa somme

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad , \quad v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad w_n = (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$$

Exercice 5 : Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Reprenez le même exercice avec $\sum u_n$ et $\sum w_n$ où $w_n = \inf(1, u_n)$.

Exercice 6 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positif convergente. Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente aussi. (Indication : utiliser le fait que $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n} \right)^2 \geq 0$)