Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Rattrapage.
Dimanche 03/07/2022 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

**Exercice 1 :** (07pts) Soit $0 < \alpha < \pi$ un paramètre réel. On considère la fonction réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 - 2x\cos\alpha + x^2\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Développer $f'$ en série entière de $x$ centrée en 0. Préciser le rayon de convergence.
3. En déduire le développement en série entière de $f$ centrée en 0. Justifier tous les calculs.

**Exercice 2 :** (08pts) Soit $g$ la fonction $2\pi$-périodique paire dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est donnée par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \beta \\ \\ 0 & \text{si} \quad \beta < x \leq \pi \end{cases}.$$

où $0 < \beta < \pi$ est un paramètre réel.

1. Représenter le graphe de $g$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de $g$ sous sa forme réelle, qu'on notera $S_g$.
3. Sur quel ensemble $E$ la série $S_g$ converge-t-elle vers $g$ ?
4. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\beta)}{n}$$

**Exercice 3 :** (05pts) Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel $\lambda$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\lambda}\, dx$$

# 2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022.

## Module: « Analyse III » - Epreuve de Rattrapage - Corrigé.

**Exercice 1:** (07 pts) $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$ ; $0 < \alpha < \pi$ paramètre.

1°/ Domaine de $f$: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - 2x\cos\alpha + x^2 > 0\}$

Calculons le discriminant: $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$. Comme $0 < \alpha < \pi$ alors le sinus ne s'annule pas, et donc $\Delta' < 0$. Le signe du trinôme est donc celui de $a$ $(=1)$, càd strictement positif. Donc 2pts

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}.$$

2°/ Série de $f'$: $f'(x) = \dfrac{-2\cos\alpha + 2x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Factorisons le dénominateur; Comme $\Delta' < 0$, les racines sont complexes conjuguées: $x_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$ et $x_2 = e^{i\alpha}$.

D'où $1 - 2x\cos\alpha + x^2 = (x - e^{-i\alpha})(x - e^{i\alpha}) = (1 - xe^{i\alpha})(1 - xe^{-i\alpha})$.

Alors $f'(x) = \dfrac{-e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} + \dfrac{-e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}}$

Supposons $|xe^{i\alpha}| < 1$ et $|xe^{-i\alpha}| < 1$ (càd $|x| < 1$) et utilisons la série géométrique: 3pts

$$f'(x) = -e^{i\alpha}\sum_{n\geq 0} x^n e^{in\alpha} - e^{-i\alpha}\sum_{n\geq 0} x^n e^{-in\alpha}$$

$$\boxed{f'(x) = -2\sum_{n\geq 0}\left(\cos(n+1)\alpha\right)x^n} \quad \boxed{R = 1}$$

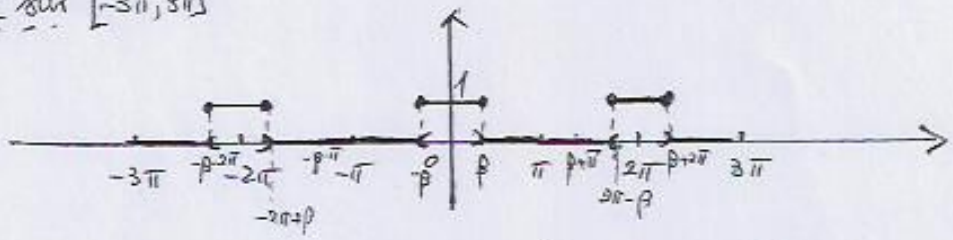
3°/ Série de $f$: D'après les propriétés de convergence normale d'une série entière (ici dans n'importe quel intervalle $[-a,a] \subset ]-1,1[$) on peut intégrer terme à terme: $f(x) = f(0) - 2\sum_{n\geq 0}\dfrac{\cos(n+1)\alpha}{n+1}x^{n+1}$ 2pts

Or $f(0) = \ln 1 = 0$ donc

$$\boxed{f(x) = -2\sum_{m\geq 1}\frac{\cos(m\alpha)}{m}x^m}$$

Exercice 2 : (08pts) $g$ fonction $2\pi$-périodique paire dont la restriction à $[0,\pi]$ est : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le \beta \\ 0 & \text{si } \beta < x \le \pi \end{cases}$, $0 < \beta < \pi$ paramètre.

1°/ Graphe de $g$ sur $[-3\pi, 3\pi]$




2pts

2°/ Série de Fourier de $g$ : * $g$ étant paire alors $b_n = 0, \forall n \ge 1$.

$$* \; a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\beta} dx = \boxed{\frac{2\beta}{\pi}}$$

$$* \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\beta}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\beta} \quad (n \ge 1)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2\sin n\beta}{n\pi}}.$$

D'où $\boxed{S_g(x) = \frac{\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\ge 1}\frac{\sin(n\beta)}{n}\cdot\cos nx.}$ 2pts

3°/ D'après le théorème de Dirichlet, la série $S_g(x)$ converge vers $g(x)$ en tout point $x$ où $g$ est continue. Les points de discontinuité sont de la forme $\beta + 2k\pi$ et $-\beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $S_g(x)$ converge vers $g(x)$ sur l'ensemble suivant : 2pts

$$\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \{\pm\beta + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4°/ Calcul de $A$ : D'après toujours le théorème de Dirichlet, on a :

$S_g(\beta) = \big(g(\beta_+) + g(\beta_-)\big)/2$ car $\beta$ est un pt de discontinuité.

$g(\beta_+) = 0$ ; $g(\beta_-) = 1$. D'où $\frac{1}{2} = \frac{\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\ge}\frac{\sin(n\beta)\cos(n\beta)}{n}$ 2pts

or $(\cos\theta)(\sin\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$ d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{\beta}{\pi} + \frac{1}{\pi}A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{2} - \beta}.$$

Exercice 3 : (05 pts) $\lambda \in \mathbb{R}$ (paramètre), $J = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda}\, dx$.

L'intégrale J est impropre en 0 et à $+\infty$.

Posons $h(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda}$

* En 0 : On a $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ car $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0}{x - 0} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1$

Donc $h(x) \sim \frac{1}{x^{\lambda-1}}$ au voisinage de 0.

D'après les intégrales de Riemann : $\int_0^a \frac{dx}{x^{\lambda-1}}$ converge 02 pts

si et ssi $\lambda - 1 < 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < 2}$.

* En $+\infty$ : On a $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ ; d'où

$h(x) \sim \frac{\pi/2}{x^\lambda}$ au voisinage de $+\infty$.

Toujours selon les intégrales de Riemann : $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$

converge si et ssi $\boxed{\lambda > 1}$. 02 pts

En définitive J est convergente

si et ssi : $\boxed{1 < \lambda < 2}$.