Rattrapage Algèbre 3 26-06-2022
Département de Maths. Faculté des Sciences
UABB – Tlemcen **Durée = 1H-45mn**

Exercice 1 : Soit A une matrice dans $M_3(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes

sont dans cet ordre de gauche à droite respectivement : (0, 1, 0), (0, 0, 1) et (-1, -3, -3).

Sans connaître les sous espaces propres ni le polynôme minimal, expliquer en deux, voire trois lignes au maximum, pourquoi on ne peut pas diagonaliser A.

Exercice 2 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$f(x, y, z) = (x, 2y - z, -y + 2z)$

Trouver tous les sous espaces vectoriels de dimension 1 qui sont stables par f.

Exercice 3 : Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice dans $M_4(\mathbb{R})$.

Déterminer les sous espaces caractéristiques de B.

Exercice 4 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini canoniquement par :

$$f(x, y, z) = (-x + z, x - 2y, -x + y)$$

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à f est triangulaire supérieure enfin donner la décomposition de Dunford de cette matrice dans cette base puis de celle associée à f dans la base canonique.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire ..... السنة الدراسية
Examen ..... الإختبار
Date ..... التاريخ
Signature de l'Etudiant ..... إمضاء الطالب

Nom ..... اللقب
Prénom ..... الإسم
Né (e) le ..... تاريخ الازدياد
N° Carte d'Etudiant ..... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

Corrigé Rattrapage Algèbre 3 26-06-22

Exo 1 : (3 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1→ A est la matrice compagnon de $P(x) = 1+3x+3x^2+x^3 = (1+x)^3$.
1→ Le poly. caractéristique est donc $P_A(x) = -(1+x)^3$. A possède
1→ une seule v.p $\lambda = -1$. Elle n'est pas diagonalisable car non scalaire

Exo 2 : (7 pts) $f(x,y,z) = (x, 2x-z, -y+2z)$

La matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminons les sous espaces propres de f.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow Au = \lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y - z = \lambda y \\ -y + 2z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x = 0 \\ (2-\lambda)y - z = 0 \\ (\lambda - 1)(y+z) = 0 \end{cases}$ 1 →

0,5 → • Si $\lambda = 1$ alors $f(u) = u$

Donc $u = (x, y, z) = (x, y, y) = x(1,0,0) + y(0,1,1)$

1 → $E_1(A) = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,1))$ = Plan vectoriel.

0,5 → • Si $\lambda \neq 1$ alors $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$

0,5 → a) Si $\lambda = 3$ alors $f(u) = 3u$

Donc $u(x,y,z) = (0, y, -y) = y(0,1,-1)$

1 → $E_3(A) = \text{Vect}(0,1,-1)$ = Dte vectorielle

0,5 → b) Si $\lambda \neq 3$ alors $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

La seul sol est donc $u = (0,0,0)$

1 → et donc si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 3$ alors λ n'est pas v.p.

Conclusion : les sous espaces vectoriels de dimension 1 qui sont

1 → stables par f, sont les dtes vectorielle de $\mathbb{R}^3$ contenues dans $E_1(A) \cup \{(0,0,0)\}$ et la dte vect $E_3(A) \cup \{(0,0,0)\}$.

Exo3 : Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(6 pts)

$P_A(x) = \det(A - xI_4)$

1 → $= (x-3)(x-1)^3$

0,5 → • $\lambda = 3$ est v.p simple

donc $E_3(A) = N_3(A)$

1 ↳ $N_3(A) = \{u \in \mathbb{R}^4 \,/\, Au = 3u\}$

On résout, $Au = 3u$, et on trouve

$N_3(A) = \mathrm{Vect}(0,0,0,1)$

0,5 → • $\lambda = 1$ est v.p triple

0,5 → $N_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_4)^3$

0,5 → $A - I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

0,5 → $(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

0,5 → $(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$N_1(A) = \{v \in \mathbb{R}^4 \,/\, (A - I_4)^3 v = 0\}$

1 → On résout $(A - I_4)^3 v = 0$, on trouve

$N_1(A) = \mathrm{Vect}((1,4,0,0), (1,0,4,0), (1,0,0,-2))$.

Exo4 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4pts)

0,5 → $P_A(x) = \det(A - xI_3) = \dots = -(x+1)^3$

0,5 → On remarque que $\lambda = -1$ est la seule v.p de A. Et comme A n'est pas scalaire alors elle n'est pas diagonalisable. Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable

0,5 → $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(1,1,0)$
$N_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A + I_3)^3 = \mathbb{R}^3$

0,5 → Pour trouver une base dans laquelle A est trigonalisable il faut trouver $\mathrm{Ker}(A + I_3)^2$ qui est entre $E_{-1}(A)$ et $N_{-1}(A)$
$\mathrm{Ker}(A + I_3)^2 = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$

0,5 → On rajoute à $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ le vecteur $(0,0,1)$ (par exemple) pour avoir $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ et dans laquelle A est trigonalisable

0,5 → Soit B la matrice triangulaire supérieure, qu'on cherche

$B = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On détermine a et b tel que $B = P^{-1}AP$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ soit $PB = AP$. Après calcul on trouve $a = b = 1$.

Décomposition de Dunford de B puis de A.

0,75 →

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D + N$$

avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ diagonale

et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \underset{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}{0}$

N nilpotente

$DN = -I_3 N = -N I_3 = ND$

Or B semblable à A, donc

0,5 →

$A = \Delta + M$ $(A = PBP^{-1})$

avec $\Delta = PDP^{-1}$ (Δ diagonalisable car D l'est)

et $M = PNP^{-1}$ (nilpotente car N l'est).

FIN