Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de remplacement de l'examen final.
Mercredi 23/02/2022 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (07pts) On considère la série entière donnée par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(\frac{n\pi}{2})\, x^n$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Calculer la somme $S(x)$ en justifiant les calculs et en donnant le domaine de validité de ces calculs.
3. En déduire la valeur de la somme suivante

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \cos(\frac{n\pi}{2}).$$

Exercice 2 : (08pts) Soit g la fonction 2π-périodique impaire dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est donnée par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}.$$

1. Représenter le graphe de g sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de g sous sa forme réelle, qu'on notera S_g.
3. Sur quel ensemble E la série S_g converge-t-elle vers g ?
4. La convergence de S_g est-elle uniforme sur E ?
5. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 3 : (05pts) Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel α, la convergence de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^\alpha}\, dx$$

$2^{ème}$ année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022

Module : "Analyse III" - Examen de Remplacement de l'EF - Corrigé !

Exercice 1 : (07 pts) $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$.

1°/ Rayon de convergence : notons $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

D'où $|a_n|^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{(2k)^{1/2k}} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$. Ainsi

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \lim_{k \to +\infty} (2k)^{-1/2k} = \lim_{k \to +\infty} e^{-\frac{1}{2k} \ln(2k)} = 1 = 1/R$$ 02,5 pts

d'où $\boxed{R = 1}$

2°/ Calcul de $S(x)$: On a $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} x^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (x^2)^k$

Posons provisoirement $x^2 = t$, alors $S(x) = W(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} t^k$

Si $|t| < 1$, on peut dériver terme à terme :

$$W'(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t^{k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} (-t)^m \quad (k-1 = m)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}$$ 02,5 pts

d'où $W(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t) + C$ (Rq : remarquons que $1+t > 0$ car $-1 < t < 1$)

Or $W(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, donc

$W(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t)$ et alors $\boxed{S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$.

Ces calculs sont valides si $x^2 < 1 \iff |x| < 1 \iff x \in]-1, 1[$.

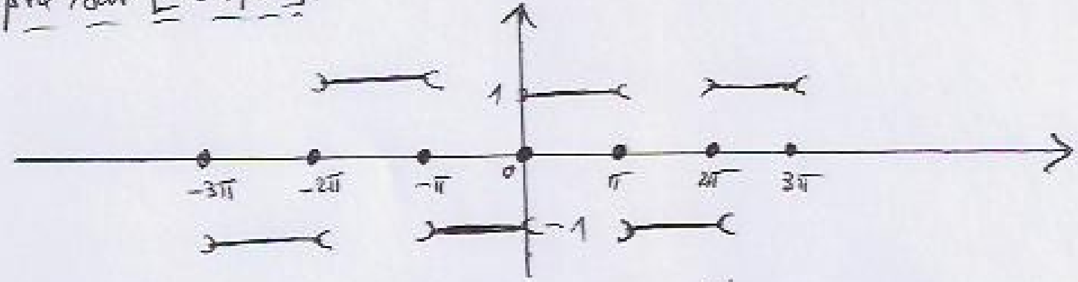
3°/ Calcul de A : $\quad A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = S(1/2)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \ln(5/4)}$$ 2 pts

Exercice 2 : (08pts) $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$

g, 2π-périodique, impaire.

1°/ Graphe sur $[-3\pi, 3\pi]$:



1pt

2°/ Calcul de S_g : Comme g est impaire, alors $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$.

Calculons les b_n $(n \geq 1)$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{\pi(2k+1)} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$ 2pts

Alors $\boxed{S_g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}}$

3°/ D'après le théorème de Dirichlet, $S_g(x)$ converge en tout pt vers $\frac{g(x^+)+g(x^-)}{2}$.

Pour les points de continuité $(g(x^+) = g(x^-) = g(x))$ on a donc $S_g(x) = g(x)$.

Les points de discontinuité sont les points de la forme $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

On a $g((m\pi)^+) = \pm 1$ et $g((m\pi)^-) = \mp 1$ donc $g((m\pi)^+) + g((m\pi)^-) = 0$ 2pts

Or en ces points $g(m\pi) = 0$ donc $S_g(m\pi) = g(m\pi) = 0$.

En définitive $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S_g(x) = g(x)}$. $(E = \mathbb{R})$

4°/ La convergence n'est pas uniforme car les fonctions $\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$, mais la somme $g(x)$ est discontinue sur $\mathbb{R}$ d'où le résultat. 1pt

5°/ A l'aide de la formule de Parseval, $\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\pi$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. D'autre part : $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}$ 2pts

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ alors $B = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{2\pi^2}{24} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi^2}{12}}$

Exercice 3 : (05pts) $J = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Posons $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}$. Remarquons que $f(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est impropre en 0 et à l'∞. 0,5

Etude en 0 : On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^{\alpha-1} f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1, \text{ donc}$$

au voisinage de 0^+, $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. 2pts

La convergence aura lieu si et ssi $\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$

Etude en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$, donc

au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$. La convergence 2pts

aura lieu ssi : $\boxed{\alpha > 1}$

En conclusion l'intégrale J converge si et ssi

$$\boxed{1 < \alpha < 2}.$$ 0,5

3