

Epreuve finale : Logique mathématique

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Soit E un ensemble d'employés et R l'ensemble des répertoires de leur système informatique.

Désignons $M(x, B)$ l'énoncé " l'employé x peut modifier le répertoire B " et $L(x, B)$ l'énoncé " l'employé x peut lire le répertoire B ".

Exprimez les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et des fonctions propositionnelles M et L :

- 1- "Il existe un répertoire pouvant être lu par tous les employés".
- 2- "Chaque employé peut modifier au moins un répertoire".
- 3- "Il est faux de dire que chaque employé peut modifier au moins un répertoire".
- 4- "Guy peut modifier tous les répertoires que Manon peut lire."
- 5- "Il est faux de dire que Guy peut modifier tous les répertoires que Manon peut lire."
- 6- "Les répertoires qui ne peuvent être modifiés par Guy ne peuvent l'être par Manon."

Exercice 2 : (06 points)

Dans une île vivent trois espèces d'habitants : les Purs (qui disent toujours la vérité), les Pires (qui mentent toujours) et les Versatiles (qui disent parfois la vérité et mentent d'autres fois). Chaque habitant de l'île est soit un Pur, soit un Pire, soit un Versatile. Un Pire ne peut épouser qu'une Pure, un Pur ne peut épouser qu'une Pire et enfin un Versatile ne peut épouser qu'une Versatile. Un couple formé de Mr et Mme A font les déclarations suivantes :

Mr A : " Ma femme n'est pas Versatile ".

Mme A : " Mon mari n'est pas Versatile ".

Que sont Mr et Mme A ?

Exercice 3 : (08 points)

On appelle barre de Pierce, le connecteur binaire noté $\downarrow$ et défini par

$$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q).$$

Montrer que chacun des connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ peut être exprimé en fonction du connecteur $\downarrow$ uniquement où $\neg$ représente la négation.

Corrigé de l'épreuve finale : Logique mathématique

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Soit E un ensemble d'employés et R l'ensemble des répertoires de leur système informatique.

Désignons $M(x, B)$ l'énoncé " l'employé x peut modifier le répertoire B " et $L(x, B)$ l'énoncé " l'employé x peut lire le répertoire B ".

Exprimez la proposition suivante à l'aide de quantificateurs et des fonctions propositionnelles M et L :

1- "Il existe un répertoire pouvant être lu par tous les employés".

$$\exists B \in R, \forall x \in E : L(x, B).$$

2- "Chaque employé peut modifier au moins un répertoire".

$$\forall x \in E, \exists B \in R : M(x, B).$$

3- "Il est faux de dire que chaque employé peut modifier au moins un répertoire".

$$\overline{\forall x \in E, \exists B \in R : M(x, B)} \equiv \exists x \in E, \forall B \in R : \overline{M(x, B)}$$

4- "Guy peut modifier tous les répertoires que Manon peut lire."

$$\forall B \in R : L(\text{Manon}, B) \Rightarrow M(\text{Guy}, B).$$

5- "Il est faux de dire que Guy peut modifier tous les répertoires que Manon peut lire."

$$\overline{\forall B \in R : L(\text{Manon}, B) \Rightarrow M(\text{Guy}, B)} \equiv \exists B \in R : L(\text{Manon}, B) \wedge \overline{M(\text{Guy}, B)}.$$

6- "Les répertoires qui ne peuvent être modifiés par Guy ne peuvent l'être par Manon."

$$\forall B \in R : \overline{M(\text{Guy}, B)} \Rightarrow \overline{L(\text{Manon}, B)}.$$

Exercice 2 : (06 points)

Dans une île vivent trois espèces d'habitants : les Purs (qui disent toujours la vérité), les Pires (qui mentent toujours) et les Versatiles (qui disent parfois la vérité et mentent d'autres fois). Chaque habitant de l'île est soit un Pur, soit un Pire, soit un Versatile. Un Pire ne peut épouser qu'une Pure, un Pur ne peut épouser qu'une Pire et enfin un Versatile ne peut épouser qu'une Versatile. Un couple formé de Mr et Mme A font les déclarations suivantes :

Mr A : " Ma femme n'est pas Versatile ".

Mme A : " Mon mari n'est pas Versatile ".

Que sont Mr et Mme A ?

Examinons les différents cas de figures qui peuvent avoir lieu : Mr A peut être

soit un Pur, un Pire ou un Versatile.

- Si Mr A est Pur : alors sa femme est Pire donc ce qu'elle dit est faux , par conséquent son mari est Versatile ce qui engendre une contradiction.

- Si Mr A est Pire : alors sa femme est Pure , ce que dit Mr A est faux, par conséquent Mme A est Versatile : ça engendre aussi une contradiction.

- Si Mr A est Versatile : alors sa femme est aussi Versatile , ici les deux déclarations de Mr et Mme A sont toutes les deux fausses, ce qui est possible à cause de la versalité de Mr et Mme A : pas de contradiction.

En conclusion Mr et Mme A sont tous les deux Versatiles.

Exercice 3 : (08 points)

On appelle barre de Pierce, le connecteur binaire noté $\downarrow$ et défini par

$$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q).$$

Montrer que chacun des connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ peut être exprimé en fonction du connecteur $\downarrow$ uniquement.

1- $\neg p \equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p.$

2- $p \vee q \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$

3- $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q).$

4- $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow q) \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q).$

5- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv [(p \Rightarrow q) \downarrow (p \Rightarrow q)] \downarrow [(q \Rightarrow p) \downarrow (q \Rightarrow p)].$
 $\equiv [(((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q))] \downarrow [(((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)) \downarrow (((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p))].$

Barème :

Exercice 1 : 01pt + 01pt + 01pt + 01pt + 01pt + 01pt = 06pts.

Exercice 2 : 01,5pts + 01,5pts + 01,5pts + 01,5pts = 06pts.

Exercice 3 : 01,5pts + 01,5pts + 01,5pts + 01,5pts + 02pts = 08pts.