Université de TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

20/01/22

L2MATH/TOPOLOGIE **Epreuve finale** (Durée 1h30)

Exercice 1(07pts)

Soit$(E, \mathcal{T}_E)$ un espace topologique tel que :

$E = \{0,1,2,3\}$ $\mathcal{T}_E = \{\emptyset, E, \{0\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}\}$.

1. Etudier la connexité de $(E, \mathcal{T}_E)$. E est-il séparé ?
2. Etudier la connexité des parties $A = \{0,1,2\}$ et $B = \{0,2,3\}$.

$Soit$ $(F, \mathcal{T}_F)$ un espace topologique et f une application continue et bijective de E vers F .

3. Montrer que F est fini, connexe et il n'est pas séparé .
4. Calculer $\overline{B}$, en déduire que $f(B)$ est dense dans F.

Exercice 2(05 pts)

1. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et A une partie fermée de E.
Montrer que si E est compact alors A est compacte.

2. Soit $\{A_n , n \in \mathbb{N}\}$ une famille de parties compactes de E, montrer que
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est compacte.

3. Dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée,
On pose pour n≥ 1 $U_n = \{x_p, p \geq n\}$.
   a) Montrer que $\forall$ n ≥ 1 , U_n est borné dans $\mathbb{R}$.
   b) Etablir que $\overline{U_n}$ est compact, en déduire que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: V= $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ est compact.

Exercice 3(08pts)

1. Soit l'application $f: (\mathbb{R}, |.|) \to \left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, |.|\right)$ telle que $f(x) = Arctan(2x)$
Montrer que f est un homéomophisme.
Soit l'application d définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $d(x,y) = |Arctan2x - Arctan2y|$.
2. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
3. Etablir que les distances d et $|.|$ sont topologiquement équivalentes.

4. Montrer que la suite $(x_n = n)_{n\in\mathbb{N}}$n'est pas de Cauchy dans$(\mathbb{R}, |.|)$ mais elle est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ et elle est divergente dans les deux espaces métriques.
les distances d et $|.|$ sont-elles métriquement équivalentes ?

5. Soit l'application N définie sur $\mathbb{R}$ par : $N(x) = d(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
   a) Est-ce que N définit une norme sur $\mathbb{R}$?
   b) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}$ telle que $\|1\| = 2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $d(x,0) \leq \|x\|$.

Corrigé

Exercice 1

1. $E = \{0,1,2,3\}$ $\mathcal{T}_E = \{\emptyset, E, \{0\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}\}$

${\mathcal{T}_E}^c = \{\emptyset, E, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2,3\}\}$, on voit que les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont : l'ensemble vide et E , alors **E est connexe**.

E n'est pas séparé car $\exists x, y \in E : \forall U_x, U_y \in \mathcal{T}_E$ avec x $\in U_x$ et y $\in U_y$, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$

pour x=2 et y=3 , les ouverts contenant x sont: ${}^2\{2,3\}, \{0,2,3\}$, ils contiennent aussi y .

2. $A = \{1,2,3\}$ $\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{2,3\}\}$ et ${\mathcal{T}_A}^c = \{\emptyset, A, \{1\}\}$ les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont : l'ensemble vide et A , donc **A est connexe.**

B $= \{0,2,3\}$, $\mathcal{T}_B = \{\emptyset, B, \{0\}, \{2,3\}\}$: B $= \{0\} \cup \{2,3\}$ =union de deux ouverts non vides,

donc B n'**est pas connexe.**

3. f une application continue et bijective de E vers F
E est fini et f est bijective alors f$(E) = F$ et card(E) $=$ card(F)
E est connexe et f **est continue** alors f(E) est aussi connexe.
E n'est pas séparé et f est continue alors f(E) n'est pas séparé car

$\exists x = f(2), y = f(3) \in F : \forall V_x, V_y \in \mathcal{T}_F$avec x $\in V_x$ et y $\in V_y$ $V_x \cap V_y \neq \emptyset$.

En effet, f est continue alors $f^{-1}(V_x)$ et $f^{-1}(V_y)$ sont ouverts dans E tels que

$2 \in f^{-1}(V_x)$ et $3 \in f^{-1}(V_y)$ et d'après la première question $f^{-1}(V_x) \cap f^{-1}(V_y) \neq \emptyset$
$f^{-1}(V_x) \cap f^{-1}(V_y) = f^{-1}(V_x \cap V_y) \neq \emptyset$ Alors $V_x \cap V_y \neq \emptyset$.

4. Le plus petit fermé qui contient B est égal à E donc $\overline{B} = E$ ou **B est dense dans E.**

i. $\overline{f(B)} \subset F$ évident puisque $f(B)$ est une partie de F.
ii. On a $f(\overline{B}) = f(E) = F$ et comme f est continue alors $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$
ie $F \subset \overline{f(B)}$
On déduit que $\overline{f(B)} = F$ autrement dit $f(B)$ est dense dans F.

Exercice 2(06 pts)

1 . (01.5pts) 2. .(01.5pts) (voir le cours)
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}$, $\forall$n≥ 1 $U_n = \{x_p, p \geq n\} \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, r > 0$: $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset [a-r, a+r]$ alors $U_n \subset [a-r, a+r]$
c-a-d $\forall$n≥ 1 U_n est borné.

b) $\overline{U_n}$ est fermé et il est déjà borné alors c'est un compact de $\mathbb{R}$.
D'après 2) on déduit que : V= $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ est un compact car c'est l'intersection infinie de compacts.

Exercice 3 (08pts)

1. **(1.5pts)** $f:(\mathbb{R},|.|) \to \left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,|.|\right)$ telle que $f(x) = Arctan(2x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} > 0$ alors f est strictement croissante donc elle est bijective et sa réciproque est donnée par $f^{-1}(x) = \frac{tanx}{2}$. f et f^{-1} sont continues donc f est un homéomophisme.

2. **(1pt)** $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ d(x,y) = |f(x) - f(y)|$

* $d(x,y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$ alors $x = y$ puisque f est bijective.
* $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$
* $d(x,z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)|$

$$d(x,z) \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$$

Alors d est une distance sur $\mathbb{R}$

3. **(1pt)** les distances d et $|.|$ sont topologiquement équivalentes si l'application identité est un homéomophisme.

- Comme f est continue de $(\mathbb{R},|\quad|)$ $vers$ $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,|\quad|\right)$,ona

  $$\forall x,y \in \mathbb{R}\ ,\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0\ ,|x-y| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| = d(x,y) \leq \varepsilon$$

  Qui signifie aussi que **id** est continue de $(\mathbb{R},|\quad|)$ $vers$ $(\mathbb{R},d)$.

  Ou bien $\boldsymbol{|x-y| \to 0 \Rightarrow d(x,y) \to 0.}$

- Comme f^{-1}est continue de $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,|\quad|\right)$ $vers(\mathbb{R},|\quad|)$

  $$\forall X,Y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon{}' > 0\ ,|X-Y| \leq \alpha_\varepsilon{}' \Rightarrow \left|f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)\right| \leq \varepsilon$$

  En posant $X = f(x)$ et $Y = f(y)$, on obtient

  $$\forall x,y \in \mathbb{R}\ ,\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon{}' > 0\ ,|f(x) - f(y)| = d(x,y) \leq \alpha_\varepsilon{}' \Rightarrow |x-y| \leq \varepsilon$$

  Qui signifie aussi que id^{-1} est continue de $(\mathbb{R},d)$ $vers$ $(\mathbb{R},|.|)$.

  Ou bien $\boldsymbol{d(x,y) \to 0 \Rightarrow |x-y| \to 0}$.

Conclusion : id est <u>un homéomophisme</u> de $(\mathbb{R},|\quad|)$ $vers$ $(\mathbb{R},d)$, d'où les distances d et $|.|$sont topologiquement équivalentes .

4. **(03pts)**

- **(0.5pt)** La suite $(x_n = n)_{n\in\mathbb{N}}$n'est pas de Cauchy dans $(\mathbb{R},|\quad|)$ car

  $$\exists\ \varepsilon = 1\ \forall N \in \mathbb{N} \quad n > m \geq N\ et \quad |x_n - x_m| = |n-m| \geq 1.$$

- $(\boldsymbol{1pt})$ $d(x_n,x_m) = |arctanx_n - arctanx_m| = \left|arctan\frac{x_n - x_m}{1+x_nx_m}\right|$

  $$= \left|arctan\frac{n-m}{1+nm}\right| \leq \frac{n}{nm} = \frac{1}{m}$$

  $$d(x_n,x_m) \leq \frac{1}{m} \leq \varepsilon \Rightarrow m \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right] \in \mathbb{N} \quad n > m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. Ainsi

est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$.

(0.25pt) Alors les distances d et $|.|$ ne sont pas métriquement équivalentes .

- **(0.5pt)**La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$ car $lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
- **(0.75pt)**La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $(\mathbb{R}, d)$, en effet , si on suppose par absurde

  que $\exists l \in \mathbb{R}$: $lim_{n\to+\infty} x_n = l \Leftrightarrow lim_{n\to+\infty} d(x_n, l) = 0$.

  $$d(x_n, l) = = \left|arctan\frac{n-l}{1+nl}\right| = \left|arctan\frac{1-\frac{l}{n}}{\frac{1}{n}+l}\right| \to \left|arctan\frac{1-\frac{l}{n}}{\frac{1}{n}+l}\right| \to \left|arctan\frac{1}{l}\right| = 0.$$

  Alors $\frac{1}{l} = 0$ impossible !

  Remarque :puisque les deux distances sont topologiquement équivalentes

  Alors elles sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

  Si La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$alors elle est divergente dans $(\mathbb{R}, d)$,

5. $\forall x \in \mathbb{R}\ N(x) = d(x, 0)$.

a) **(0.75pt** N ne définit pas une norme sur $\mathbb{R}$ car $N(\alpha x) = |arctan2\alpha x| \neq |\alpha||arctan2x|$

Exemple pour $x = \frac{1}{2}$ $et\ \alpha = 2 \quad N(2) = arctan2 \neq 2arctan1$.

b) **(0.75pt** $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ avec $\|1\| = 2 \quad alors\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\|x\| = \||x|\| = |x|\|1\| = 2|x|$ D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ d(x, 0) = |arctan2x| \leq 2|x| = \|x\|$.