Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen final.
Dimanche 16/01/2022 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (07pts) On considère la série entière donnée par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n^2}{n!}\, x^n$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Calculer la somme $S(x)$ en justifiant les calculs et en donnant le domaine de validité de ces calculs.
3. En déduire la valeur de la somme suivante

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n n^2}{n!}.$$

Exercice 2 : (08pts) Soit g la fonction 2π-périodique paire dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est donnée par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

1. Représenter le graphe de g sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de g sous sa forme réelle, qu'on notera S_g.
3. Sur quel ensemble E la série S_g converge-t-elle vers g ?
4. La convergence de S_g est-elle uniforme sur E ?
5. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$B = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

Exercice 3 : (05pts) Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel α, la convergence de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2021/2022.

Module : "Analyse III" - Examen Final - Corrigé.

Exercice 1 : (07pts) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n^2}{n!} x^n$

1°/ Rayon de convergence : Posons $c_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n!}$, alors

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)^2}{(-1)^n + n^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)^2}{(-1)^n + n^2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

et $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} + (n+1)^2}{(-1)^n + n^2}\right| \cdot \frac{1}{(n+1)} = \frac{\cancel{(n+1)^2}^{\,1}}{n^2} \left|\frac{1 + \cancel{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}^{\,0}}{1 + \cancel{\frac{(-1)^n}{n^2}}^{\,0}}\right| \cdot \cancel{\frac{1}{n+1}}^{\,0}$ 2pts

d'où $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$ et $\boxed{R = +\infty}$

2°/ Calcul de $S(x)$: Comme $R = +\infty$, alors le domaine de convergence est $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et donc toutes les opérations (dérivation, intégration, ...) seront valables sur $\mathbb{R}$.

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} x^n$$

3pts

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n-1)!} x^n$$

$$= e^{-x} + \sum_{n \geq 1} \frac{n-1+1}{(n-1)!} x^n = e^{-x} + \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= e^{-x} + x^2 e^x + x e^x$$

d'où $\boxed{S(x) = e^{-x} + x(x+1)e^x}$

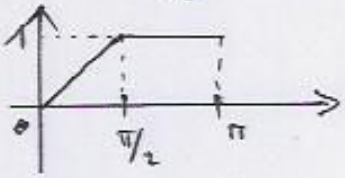
3°/ Valeur de A : $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n n^2}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n + n^2}{n!} (-1)^n = S(-1)$

2pts

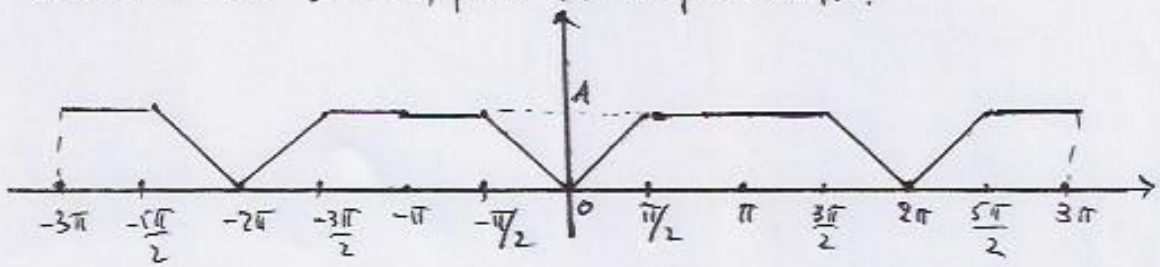
d'où $\boxed{A = e}$.

Exercice 2 : (08 pts) $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

1°/ Graphe de g sur $[-3\pi, 3\pi]$: sur $[0,\pi]$ on a :



Maintenant on utilise la parité pour dessiner sur $[-\pi,\pi]$, puis la 2π-périodicité :



1pt

2°/ Série de Fourier de g : Comme g est paire alors $\forall n \ge 1$, $b_n = 0$.

Calculons les a_n.

$$* \; a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} dx\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi^2}\left[x^2\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 3/2}$$

$$* \text{ Pour } n \ge 1 : \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi}\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi/2} \sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{\sin(n\pi/2)}{n}\right]$$

$$= \cancel{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi\sin(n\pi/2)}{2n}} + \frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \cancel{\frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n}}.$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]}$$

3pts

Donc

$$\boxed{S_g(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)}{n^2}\cos nx}$$

3°/ L'ensemble E : D'après le théorème de Dirichlet, la série converge en tout point vers $\frac{1}{2}\left[g(x^+)+g(x^-)\right]$. Or g est partout continue, donc $g(x^+)=g(x^-)=g(x)$. Ainsi la série converge vers g sur $\mathbb{R}$. $\boxed{E=\mathbb{R}}$ 1pt

4°/ Convergence uniforme ? On a :

$$\left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{n^2}\cos nx\right| \leq \frac{2}{n^2},$$ donc la convergence est normale sur $\mathbb{R}$ et donc uniforme sur $\mathbb{R}=E$. 1pt

5°/ Calcul de B : On a :

$$g(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{n^2}\cos(nx)$$

Evaluons en $x=\pi/2$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

On a : $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } n=2k+1\\ (-1)^k & \text{si } n=2k\end{cases}$; d'où 2pts

$$1=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{\left((-1)^k-1\right)(-1)^k}{4k^2}$$

et $(-1)^k=\begin{cases}1 & \text{si } k=2m\\ -1 & \text{si } k=2m+1\end{cases}$ d'où

$$1=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{m\geq 0}\frac{2}{(2m+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{B=\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

Exercice 3 : (05pts) $\alpha \in \mathbb{R}$, $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$.

* Au voisinage de 0^+ : A partir de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ on déduit :

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} f(x) = 1$ et dans un intervalle $]0,a]$ a petit la fonction $f(x) > 0$. Donc $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ $(x \to 0^+)$ 1,5pt

Il y aura convergence en 0 ssi $\alpha - 1 < 1 \Rightarrow \boxed{\alpha < 2}$

* Au voisinage de $+\infty$: On peut écrire $J = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

On peut étudier la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ à l'aide du critère d'Abel :

* On a : $\left|\int_\alpha^\beta \sin x\,dx\right| = |-\cos\beta + \cos\alpha| \leq 2$, $\forall \alpha, \beta \geq a$

* Si $\boxed{\alpha > 0}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive décroissante car $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ 1,5pt

Donc si $\boxed{\alpha > 0}$, l'intégrale converge par le critère d'Abel.

* Si $\boxed{\alpha \leq 0}$. Posons $J_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \int_0^\lambda \frac{1}{x^\alpha} \cdot d(-\cos x)$

$J_\lambda = \left[-x^{-\alpha}\cos x\right]_0^\lambda - \alpha \int_0^\lambda \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx = -\frac{\cos\lambda}{\lambda^\alpha} - \alpha \int_0^\lambda \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx.$

Supposons que $-1 < \alpha \leq 0 \Rightarrow 0 < \alpha+1 \leq 1$, alors $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx$ conv par le critère d'Abel. Si on suppose que J_λ converge q.d $\lambda \to +\infty$ alors forcément $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha}\cos\lambda$ existe, or cette limite n'existe pas, donc pour $-1 < \alpha \leq 0$, J_λ diverge q.d $\lambda \to +\infty$. On peut refaire le raisonnement pour $-2 < \alpha \leq -1$ avec une deuxième intégration par parties. En définitive 2pts

$\boxed{J \text{ converge ssi } 0 < \alpha < 2}$.