

Contrôle Continu(durée 01h30)

Exercice 1 (07pts)

Dans $\mathbb{R}$, on considère la famille T de parties de $\mathbb{R}$ telle que $T = \{\emptyset, \mathbb{R}, (U_n)_{n \in \mathbb{Z}}\}$ avec $U_n =]-\infty, n]$

- 1) Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un espace topologique, est-il séparé?
- 2) Déterminer tous les fermés dans $(\mathbb{R}, T)$, en déduire l'adhérence de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{R}, T)$. $(\mathbb{R}, T)$ est-il séparable?
- 3) Soient $A = [0, 1]$, $B =]\sqrt{2}, +\infty[\cup \{0, 1\}$ et $C =]-\infty, \sqrt{2}[$. Trouver l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A , B et C dans $(\mathbb{R}, T)$.
- 4) Donner les définitions du point isolé et du point d'accumulation d'une partie de E

Déterminer les points isolés de B et les points d'accumulation de $C \setminus A$.

- 4) Déterminer le sous espace topologique (B, T_B) .

Exercice 2 (08pts)

On munit l'ensemble $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (dans $(\mathbb{R}, ||)$) vers une limite $f(x)$ que l'on déterminera.

Tracer le graphe de f_n et de f

- 2) Calculer $d_1(f_n, f)$, vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f) = 0$; conclure.
- 3) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans (E, d_1) ,

en déduire que E muni de la distance d_1 n'est pas complet.

On définit l'application $d' : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$d'(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g \\ 1 + d_1(f, g) & \text{si } f \neq g \end{cases}$$

- 1) Démontrer que d' est une distance sur E

2) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle de Cauchy dans (E, d') ?

3) Montrer que si $(h_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (E, d') alors elle est stationnaire...

En déduire que (E, d') est complet.

QCM(05PTS)

Corrigé

Exercice 1

$T = \{\emptyset, \mathbb{R}, (U_n)_{n \in \mathbb{Z}}\}$ avec $U_n =]-\infty, n]$

1) 02pts T est une topologie car :

i) $\emptyset \in T, \mathbb{R} \in T$

ii) $\cup_{n \in I} U_n = \begin{cases} \mathbb{R} \in T & \text{si } I \text{ est infini et } \max_{n \in I} n = +\infty \\ U_M \in T & \text{si } I \text{ est infini et } \max_{n \in I} n = M \\ U_M \in T & \text{si } I \text{ est fini et } \max_{n \in I} n = M \end{cases}$ **la réunion quel-**

conque d'ouverts est un ouvert.

iii) $\cap_{n \in I} U_n = U_m$ avec $\min_{n \in I} n = m$ **l'intersection finie** d'ouverts est un ouvert

$(\mathbb{R}, T)$ est un espace topologique séparé si $\forall x \neq y \in \mathbb{R}, \exists n, m \in \mathbb{Z} : x \in U_n, y \in U_m$ et $U_n \cap U_m = \emptyset$ ceci est impossible car

$\forall n, m \in \mathbb{Z} : U_n \cap U_m = U_{\min(n, m)} \neq \emptyset$ Alors $(\mathbb{R}, T)$ n'est pas séparé.

2) 02pts Les fermés dans $(\mathbb{R}, T)$ sont donné par : $T^c = \{\emptyset, \mathbb{R}, (U_n^c)_{n \in \mathbb{Z}}\}$ avec $U_n^c =]n, +\infty[$

L'adhérence de $\mathbb{Z}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$

L'adhérence de $\mathbb{N}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} = U_{-1}^c =]-1, \infty[$

On remarque que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. alors $\mathbb{Z}$ est une partie **dense et dénombrable** dans $(\mathbb{R}, T)$, on déduit que $(\mathbb{R}, T)$ est **séparable**.

3) 0225pts I. $A = [0, 1]$

* L'intérieur de A = plus grand ouvert contenu dans $[0, 1] = \text{int}(A) = \emptyset$

* L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant $A = \overline{A} = U_{-1}^c =]-1, \infty[$

* La frontière de A : $Fr(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A) = \overline{A}$.

II $B =]\sqrt{2}, +\infty[\cup \{0, 1\}$

* $\text{int } B = \emptyset$

* $\overline{B} = U_{-1}^c =]-1, \infty[$

* $Fr(B) = \overline{B} \setminus \text{int}(B) = \overline{B}$.

III $C =]-\infty, \sqrt{2}[$

* $\text{int } C =]-\infty, 1[$

* $\overline{C} = \mathbb{R}$

* $Fr(C) = \overline{C} \setminus \text{int}(C) = [1, +\infty[$

4) (0.75pt) i) Le seul point isolé de B est $x = 0$ car $\exists U \in T$ $U = U_0 : U \cap B = \{0\}$
 $x = 1$ n'est pas point isolé car $\forall U \in T : 1 \in U \Rightarrow U \cap B \supseteq \{0, 1\}$ et

$\forall x \in B^* = B - \{0\}, \forall U \in T : x \in U \Rightarrow U \cap B - \{x\} \neq \emptyset$ autrement dit tous les points de B^* , . sont des points d'accumulation .

ii) $D = C \setminus A =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \sqrt{2}[$, $\overline{D} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad U_n \cap D - \{x\} \neq \emptyset$ les réels tous sont des points d'accumulation de $C \setminus A$.

4) facultatif(01pt) Déterminer le sous espace topologique (B, T_B) . $T_B = \{\emptyset, B, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1\} \cup \dots\}$

Exercice 2(08pts)

On munit l'ensemble $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

1)(01pt)

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$* \forall x > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < x, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(0.5pt) On remarque que f n'est pas continue au point $x=0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$ alors $f \notin E$.

Graphes(01pt)

$$2) (01pt) d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx = \left[x - \frac{nx^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0; \text{ on conclue que } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ dans } (E, d_1).$$

3) (01pt) Montrons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans (E, d_1) ,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \quad d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - m)x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} 1 - mx dx = \left[(n - m) \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[x - m \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2m} \leq \frac{3}{2m}$$

$$d_1(f_n, f_m) \leq \varepsilon \Rightarrow m \geq \frac{3}{2\varepsilon}, \text{ on déduit:}$$

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon = \left[\frac{3}{2\varepsilon} + 1 \right] : \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d_1(f_n, f_m) \leq \varepsilon \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f_m) = 0$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans (E, d_1) mais sa limite n'appartient pas à E alors E muni de la distance d_1 n'est pas complet.

On définit l'application $d' : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$d'(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g \\ 1 + d_1(f, g) & \text{si } f \neq g \end{cases}$$

1) (01.5pt) d' est une distance sur E , en effet,

$\forall f, g, h \in E$

$$* d'(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ par définition. (l'identité est vérifiée)}$$

d_1 est une distance alors

$$* d_1(f, g) = d_1(g, f) \Rightarrow d'(f, g) = d'(g, f) \text{ (la symétrie est vérifiée)}$$

$$* d_1(f, g) \leq d_1(f, h) + d_1(h, g) \text{ alors } 1 + d_1(f, g) \leq 1 + d_1(f, h) + d_1(h, g) \leq 1 + d_1(f, h) + 1 + d_1(h, g) 1 + d_1(f, h) + 1 + d_1(h, g)$$

$$\text{si } f = g \text{ alors } d'(f, g) = 0 \leq d'(f, h) + d'(h, g) \quad \forall h \in E.$$

si $f \neq g$, $f \neq h$ $h \neq g$ alors $d'(f, g) = 1 + d_1(f, g) \leq 1 + d_1(f, h) + 1 + d_1(h, g) = d'(f, h) + d'(h, g)$

si $f \neq g$, $f = h$ $h \neq g$ alors $d'(f, g) = d'(h, g) \leq \underbrace{d'(f, h)}_0 + d'(h, g)$

si $f \neq g$, $f \neq h$ $h = g$ alors $d'(f, g) = d'(f, h) \leq d'(f, h) + \underbrace{d'(h, g)}_0$

d'où l'inégalité triangulaire est vérifiée)

2) (01pt) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \succ m \quad f_n \neq f_m \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} d'(f_n, f_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 + d_1(f_n, f_m) = 1 \neq 0$

alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy dans (E, d') ..

3) (01pt) Si $(h_n)_n \subset E$ est une suite de Cauchy dans (E, d') alors
 $\forall \varepsilon \quad \exists N_\varepsilon : \forall n, m \in \mathbb{N} : n \succ m \geq n_0 \Rightarrow d'(h_n, h_m) \leq \varepsilon$

si $h_n \neq h_m$, $d'(h_n, h_m) = 1 + d_1(h_n, h_m) \succ 1 \not\rightarrow 0$ alors $\forall n \succ m \geq N_\varepsilon \quad h_n = h_m$
 autrement dit, elle est stationnaire donc convergente vers la limite $h_{n_0} \in E$.

On déduit que toute suite de Cauchy dans (E, d') convergente dans E .

Alors (E, d') est complet.