Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2021-2022**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2ème Année Licence Mathématique Durée : 01H30.

Contrôle Continu : Logique mathématique

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

---

Exercice 1 : (06 points)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
b. Montrer que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
c. Montrer que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

a. Montrons que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $x \in A\Delta B$ si et seulement si ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ (le ou exclusif). Alors on a $A\Delta B = \{x \in A$ ou bien $x \in B\}$.

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\}.$$

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

b. Montrons que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \vee x \in B) \text{ et } (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \text{ ou } (x \in \overline{A} \wedge x \in B)\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cap \overline{B} \text{ ou } x \in \overline{A} \cap B\}.$$

$$A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

c. Montrer que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}).$$

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B.$$

Exercice 2 : (06 points)

Soit L l'ensemble des langues enseignées dans un établissement scolaire. Soit E l'ensemble des élèves de cet établissement.

Si l'élève x étudie la langue l, on note : $x \ \phi \ l$.

Dire ce que signifient les propositions suivantes :

— $\forall x \in E, \forall l \in L : x \ \phi \ l$: $\boxed{\text{Tous les élèves étudient toutes les langues.}}$

— $\forall x \in E, \exists l \in L : x \ \phi \ l$: $\boxed{\text{Tous les élèves étudient au moins une langue.}}$

— $\exists l \in L, \exists x \in E : x \ \phi \ l$: $\boxed{\text{Il existe au moins une langue étudiée par au moins un élève}}$.

— $\forall l \in L, \exists x \in E : x \ \phi \ l$: $\boxed{\text{Toutes les langues sont étudiées par au moins un élève.}}$

Traduisez en language mathématiques les phrases suivantes :

- Tous les élèves étudient au moins deux langues :

$\boxed{\forall x \in E, \exists l_1, l_2 \in L : x \ \phi \ l_1 \wedge x \ \phi \ l_2.}$

- Mathieu étudie toutes les langues : Notons Mathieu$= x_0$:

$\boxed{\exists x_0 \in E, \forall l \in L : x \ \phi \ l.}$

- Tous les élèves étudient l'anglais : Notons l'anglais$= l_0$:

$\boxed{\forall x \in E, \exists l_0 \in L : x \ \phi \ l_0.}$

Exercice 3 : (08 points)

En utilisant la table de vérité montrer que :

$$p \veebar\!\!\vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q),$$

où $\veebar\!\!\vee$ désigne le "ou exclusif" et $\neg$ représente la négation.

p	q	$p \veebar\!\!\vee q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1

— Exprimer les connecteurs en fonction de $\neg$ et $\wedge$ uniquement :
$p \veebar\!\!\vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

— Exprimer les connecteurs en fonction de $\neg$ et $\Rightarrow$ uniquement :

$$p \veebar\!\!\vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg(p \Rightarrow \neg q)).$$
$$\Rightarrow p \veebar\!\!\vee q \equiv \neg\Big[(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)\Big].$$

Barème :

Exercice 1 : $03pts + 01,5pts + 01,5pts = 06pts.$

Exercice 2 : $01pt + 01pt + 01pt + 01pt + 01pt + 0,5pt + 0,5pt = 06pts.$

Exercice 3 : $04pts + 02pts + 02pts = 08pts.$