Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2021/2022

Contrôle continu d'analyse numérique 1

Durée: 90 mn

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé
Veillez à justifier soigneusement vos réponses
Il sera tenu compte dans la notation de la présentation de la copie d'examen

Exercice 1

1- Calculer le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ autour de $x_0 = 0$. On donne $q_1 = \sqrt{1.0001} = 1.00005$, $q_2 = \sqrt{0.9999} = 0.99995$ et $\sqrt{1.0001} - \sqrt{0.9999} = 0.000\,1$.
2- A l'aide de ce développement et dans une arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, évaluer $fl(q_1)$ et $fl(q_2)$. Donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation $fl(q_1)$.
3- Evaluer l'expression $q_1 \ominus q_2$,indiquer la source potentielle d'erreur et suggérer une autre façon d'estimer la valeur de cette expression qui garantirait un meilleur comportement vis à vis des erreurs d'arrondi. Justifier.

Solution

1-On a

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}\ (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

2- On prend

$$\begin{aligned}
x &= 0.0001 \Rightarrow fl(x) = 0.1\times 10^{-3} \Rightarrow fl(\frac{x}{2}) = 0.5\times 10^{-4}\\
fl(x^2) &= 0.1\times 10^{-7} \quad \text{et } fl(\frac{x^2}{8}) = fl(\frac{0.1\times 10^{-7}}{0.8\times 10}) = fl(0.125\times 10^{-8})\\
&\Rightarrow fl(1+\frac{x}{2}) = fl\left(0.1\times 10 + 0.5\times 10^{-4}\right) = fl((0.1+0.000005)\times 10)\\
&= fl((0.100005)\times 10) = 0.1\times 10\\
fl(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}) &= fl(0.1\times 10 - 0.125\times 10^{-8}) = 0.1\times 10
\end{aligned}$$

$$fl(q_1) = 0.1\times 10$$

Maintenant pour calculer $fl(q_2)$
on prend

$$\begin{aligned}
x &= -0.0001 \Rightarrow fl(x) = -0.1\times 10^{-3} \Rightarrow fl(\frac{x}{2}) = -0.5\times 10^{-4}\\
fl(x^2) &= 0.1\times 10^{-7} \quad \text{et } fl(\frac{x^2}{8}) = fl(\frac{0.1\times 10^{-7}}{0.8\times 10}) = fl(0.125\times 10^{-8})\\
&\Rightarrow fl(1-\frac{x}{2}) = fl\left(0.1\times 10 - 0.5\times 10^{-4}\right) = fl((0.1-0.000005)\times 10)\\
&= fl(0.099995\times 10) = 0.1\times 10\\
fl(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}) &= fl(0.1\times 10 - 0.125\times 10^{-8}) = 0.1\times 10
\end{aligned}$$

Comme

$$|q_1 - fl(q_1)| = |1.00005 - 0.1 \times 10| = 0.000\,05 = 0.5 \times 10^{-4}$$

alors le nombre de chiffres significatifs de l'approximation est 4.
3-

$$q_1 \ominus q_2 = fl(fl(q_1) - fl(q_2)) = 0$$

Pour eviter l'erreur d'annulation dûe à la soustraction de nombres voisins, on pose

$$\sqrt{1.0001} - \sqrt{0.9999} = \frac{1.0001 - 0.9999}{\sqrt{1.0001} + \sqrt{0.9999}} = \frac{0.2 \times 10^{-3}}{\sqrt{1.0001} + \sqrt{0.9999}}$$

$$fl(\frac{0.2 \times 10^{-3}}{\sqrt{1.0001} + \sqrt{0.9999}}) = fl\left(\frac{0.2 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10 + 0.1 \times 10}\right) = 0.1 \times 10^{-3}$$

c'est la valeur exacte.

Exercice 2

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = \sin\left(\frac{7x+1}{8}\right)$.

1- Montrer que g possède un point fixe unique α dans $[-\pi, \pi]$ et que les suites définies par $x_0 \in [-\pi, \pi]$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ convergent vers α.

2- Donner une condition suffisante sur le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à $10^{-p}, p$ entier positif donné.

Solution

1- La fonction g est continue de $[-\pi, \pi] \to [-1, 1] \subset [-\pi, \pi]$ et $g'\,(x) = \frac{7}{8}\cos\left(\frac{7x+1}{8}\right)$ donc $|g'\,(x)| \leq \frac{7}{8} < 1, \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Le théorème de point fixe implique que la fonction g possède un point fixe unique α dans $[-\pi, \pi]$ et que les suites définies par $x_0 \in [-\pi, \pi]$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ convergent vers α.

2- En appliquant la formule

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|$$

comme $k = \frac{7}{8}$ alors

$$|x_n - \alpha| \leq 8\left(\frac{7}{8}\right)^n |x_1 - x_0|$$

On prend n tel que

$$8\left(\frac{7}{8}\right)^n |x_1 - x_0| \leq 10^{-p}.$$

Alors

$$\left(\frac{7}{8}\right)^n \leq \frac{10^{-p}}{8\,|x_1 - x_0|},$$

et donc

$$n \geq \frac{-p - \log_{10}\left(8\,|x_1 - x_0|\right)}{\log_{10}\left(\frac{7}{8}\right)} = -\frac{1}{\log_{10} 7 - \log_{10} 8}\left(p + \log_{10}|x_0 - x_1| + \log_{10} 8\right)$$

Exercice 3

Les questions 1- et 2- sont indépendantes.

1- Démontrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ a au moins un point fixe.

2- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I, 0 < M_1 \leq f'(x) \leq M_2.$$

(a) On suppose que f a un zéro sur I. Montrer qu'il est unique.

On se propose de calculer numériquement le zéro de f. Pour cela, on introduit la fonction g définie par

$$g(x) = x - \lambda f(x),$$

où λ est un réel strictement positif.

(b) Montrer que g a un seul point fixe dans I.

(c) Montrer que l'on peut choisir λ telle que la suite x_n définie par x_0 donné dans I et $x_{n+1} = g(x_n) \forall n \geq 0$ converge vers le zéro de f.

(d) Comment choisir λ pour garantir une convergence quadratique au moins.

Solution

1- on pose $h(x) = f(x) - x$ la fonction h est continue sur $[0,1]$.

Si $h(0) = 0$ alors $f(0) = 0$ et donc 0 est un point fixe,

sinon si $h(1) = 0$ alors $f(1) = 1$ et donc 1 est un point fixe,

sinon on a $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$ ce qui implique $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un zéro de la fonction h dans l'intervalle $(0,1)$ c'est à dire $\exists \alpha \in (0,1)$ telle que $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$, donc α est un point fixe de f.

2- (a) Nous avons f admet un zéro de f dans I, de plus f est strictement croissante sur I d'où l'unicité du zéro dans I.

(b)

$$g(x) = x \Leftrightarrow x - \lambda f(x) = x \Leftrightarrow \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{car } \lambda > 0$$

d'après la question (a) g a un seul point fixe dans I.

(c) on veut choisir λ pour s'assurer d'avoir un point fixe attractif.

Pour tout $x \in I$

$$-1 < g'(x) < 1$$

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1$$

$$-2 < -\lambda f'(x) < 0$$

$$0 < \lambda f'(x) < 2$$

$$0 < \lambda < \frac{2}{f'(x)}$$

maintenant

$$M_1 \leq f'(x) \leq M_2$$

ce qui implique

$$\frac{2}{M_2} \leq \frac{2}{f'(x)} \leq \frac{2}{M_1}$$

On peut donc choisir

$$0 < \lambda < \frac{2}{M_2}$$

(c) Pour garantir une convergence quadratique il faut choisir λ tel que

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Exercice 4
Soit f défini sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = 3x^2 - 1$. On veut résoudre $f(x) = 0$.
(a) Trouver le nombre d'étapes de la méthode de bissection nécessaires pour s'assurer que la solution calculée a une erreur inférieure à 10^{-6}, partant de l'intervalle $[0,1]$.
(b) Utilisant la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ définie par la méthode de Newton avec x_0 proche de $\alpha = \sqrt{3}/3$, montrer qu'il existe un ξ_n entre α et x_n tel que

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} g''(\xi_n)\,(x_n - \alpha)^2$$

(c) Quelles sont les limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^3}$$

Déduire l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour l'approximation de α.
Solution
(a) on sait que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

pour s'assurer que la solution calculée a une erreur inférieure à 10^{-6} on choisit n tel que

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq \log_2 10^6$$

(b) La fonction itérative de la méthode de Newton est

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

alors

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

et

$$g''(x) = \frac{f'(x)^3 f''(x) + f(x)f'(x)^2 f^{(3)}(x) - 2f'(x)f''(x)^2 f(x)}{f'(x)^4}.$$

au point $x = \alpha$

$$g'(\alpha) = 0$$

et

$$g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}.$$

En utilisant le développement de Taylor, il existe ξ entre α et x tel que

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x-\alpha)^2 \\ &= \alpha + \frac{1}{2} g''(\xi)(x-\alpha)^2 \\ &= \alpha + \frac{1}{2} g''(\xi)(x-\alpha)^2 \end{aligned}$$

pour $x = x_n$,il existe ξ_n entre α et x_n tel que

$$g(x_n) = \alpha + \frac{1}{2} g''(\xi_n)(x_n - \alpha)^2$$

alors

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} g''(\xi_n)(x_n - \alpha)^2$$

(c) En utilisant (b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} |g''(\xi_n)| = \frac{1}{2} |g''(\alpha)| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il en découle alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} |x_n - \alpha| = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \frac{1}{|x_n - \alpha|} = +\infty.$$