

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.

Module : *Analyse 3* - Épreuve de Contrôle continu.

Jeudi 16/12/2021 - Durée : 01h30mn.

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) On donne les termes généraux de deux séries numériques

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n, \quad v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$$

Étudier la convergence de chacune des deux séries.

Exercice 2 : (08pts) On considère la fonction réelle f de la variable t suivante :

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + x^2} \quad \text{avec} \quad t \in [1, \infty[$$

où $x \in [0, \infty[$ est un paramètre.

1. Étudier les variations de f en dressant son tableau de variation. (On distinguera les cas selon les valeurs du paramètre x)
2. On pose $w_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$ avec $n \geq 1$ et $x \geq 0$. Montrer que la série de fonctions de terme général $w_n(x)$ est simplement convergente pour tout $x \geq 0$. Cette convergence simple est-elle absolue ?
3. Étudier ensuite la convergence normale, puis la convergence uniforme sur l'intervalle $[0, \infty[$.

Exercice 3 : (06pts) On considère la série entière réelle

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer la somme $S(x)$ explicitement.
3. Calculer enfin la valeur de $S^{(10)}(0)$.

Exercice 1: (06 pts) * $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, $n \geq 0$.

Le terme général étant positif, on peut essayer d'appliquer le critère de Cauchy. $u_n^{1/n} = \frac{n}{2n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$

donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. (3pts)

* $v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$, $n \geq 0$.

1^{ère} méthode: On peut s'inspirer des séries "télescopiques".

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k}) = \sum_{k=0}^n \left[\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right]$$

$$= (\sqrt{n+3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{n+2} - 1) + \sqrt{n+1} = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1 - \sqrt{2}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$ et la série diverge. (3pts)

2^{ème} méthode: On cherche un équivalent de v_n q.d. $n \rightarrow +\infty$. (3pts)

$$\text{On a: } v_n = \sqrt{n(1+\frac{3}{n})} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left[\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right].$$

On utilise un développement limité de $\sqrt{1+t}$ au voisinage de 0:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + t \varepsilon(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0, \quad \text{à l'ordre 1.}$$

$$\Rightarrow v_n = \sqrt{n} \left[1 + \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n} \varepsilon\left(\frac{3}{n}\right) - 1 \right] = \frac{3}{2\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n}} \varepsilon\left(\frac{3}{n}\right)$$

donc $v_n \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}$ à l'infini. (3pts)

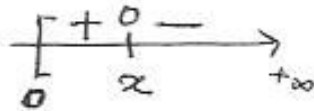
Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2}$) divergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Donc $\sum v_n$ est divergente.

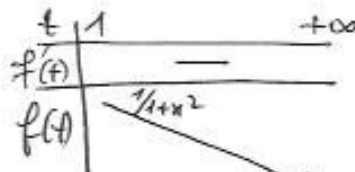
Exercice 2: (10pts) $f(t) = \frac{t}{t^2 + x^2}$; $t \in [1, +\infty[$. ($x \geq 0$ paramètre)

1°/ Etude de f : $f(1) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

$$f'(t) = \frac{(t^2+x^2) - 2t^2}{(t^2+x^2)^2} = \frac{x^2 - t^2}{(t^2+x^2)^2}$$

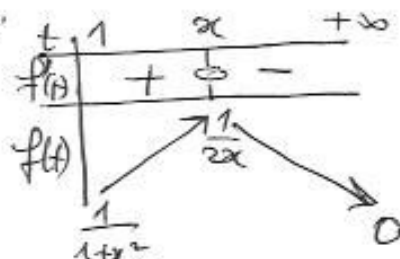


1^{er} cas: $0 \leq x \leq 1$ Alors sur $[1, +\infty[$, $f'(t) \leq 0$
et f est décroissante.



2^{ème} cas: $x > 1$

Alors le tableau de variation de f se présente ainsi:



1pt

1pt

2°/ $W_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$, $n \geq 1$. ($x \geq 0$). On applique le

critère de Leibniz-Abel: $a_n = \frac{n}{n^2 + x^2}$, $b_n = (-1)^{n-1}$.

* $\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 1$ car $\sum_{k=1}^n b_k = 0$ ou ± 1 selon n .

* D'après la 1^{ère} question, la suite (a_n) est ≥ 0 , décroissante à partir d'un $n_0 \geq \left\lceil \frac{1}{2x} \right\rceil + 1$ si $x > 0$ et toujours si $x = 0$.
De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $\forall x \geq 0$.

2pts

Ainsi, selon le critère de Leibniz-Abel, la série converge simplement $\forall x \geq 0$.

On remarque que $|W_n(x)| = a_n = \frac{n}{n^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ \sim \frac{1}{n} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Donc la convergence n'est pas absolue.

1pt

2

30/ Etude de la convergence normale $|W_n(x)| = \frac{n}{n^2+x^2}$

$$\text{On a } \frac{d}{dx} \left(\frac{n}{n^2+x^2} \right) = \frac{-2nx}{(n^2+x^2)^2} \leq 0 \quad (n^{\circ} x \geq 0)$$

donc la fonction $x \mapsto \frac{n}{n^2+x^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$

$$\text{et donc } \sup_{x \geq 0} |W_n(x)| = |W_n(0)| = \frac{1}{n}$$

or $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum W_n(x)$ ne converge pas normalement.

Etude de la convergence absolue: On applique le critère d'Abel uniforme. On a

$$\star \sup_{x \geq 0} \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 1 \quad (\text{les } (b_k) \text{ ne dépendent pas de } x).$$

$$\star \sup_{x \geq 0} q_n(x) = q_n(0) = \frac{1}{n} \quad \text{donc la}$$

suite $(q_n(x))_{n \geq 0}$ tend vers 0 uniformément sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, le critère d'Abel uniforme fonctionne, la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3: (6 pts) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} x^n$

1°/ Rayon de convergence: $C_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)!} \Rightarrow |C_n| = \frac{1}{(n+2)!}$

$$\Rightarrow \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Après la formule de d'Alembert, $\boxed{R = +\infty}$

2°/ Comme $R = +\infty$, le domaine de convergence est $R =]-\infty, +\infty[$.
On peut donc effectuer toutes les opérations d'analyse (dérivation, intégration, ...). Ici on peut faire :

$$\begin{aligned} x^2 S(x) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \quad (\text{en posant } n+2 = k) \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) - (1 - x) = e^{-x} - 1 + x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

3°/ Calcul de $S^{(10)}(0)$: $S^{(10)}(0)$ est la valeur de la dérivée d'ordre 10 au point 0. On sait que

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ d'où}$$

$$\frac{S^{(10)}(0)}{(10)!} = \frac{(-1)^{10}}{(12)!} \Rightarrow \boxed{S^{(10)}(0) = \frac{1}{12 \cdot 11} = \frac{1}{132}}$$

2pts

2pts

2pts