

Licence 1ère année MI, 2021–2022

## ANALYSE2

### Fiche de TD 3 : Intégrales et calcul des primitives

#### 1) Intégrales indéfinies.

**Exercice 1.** Calculer les intégrales indéfinies suivantes

$$1) \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad 2) \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx, \quad 3) \int \cos(3x + 2) dx,$$
$$4) \int (\sinh(x))^2 dx, \quad 5) \int \frac{e^x}{e^{-x} + e^x} dx.$$

**Exercice 2.** En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int \frac{\ln(x)}{x^n} dx, \quad n \neq 1, \quad 2) \int (x^2 - x) \sin(x) dx, \quad 3) \int e^x \cos(x) dx.$$

**Exercice 3.** En utilisant le changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}, \quad 2) \int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{2x - x^2}}, \quad 3) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

**Exercice 4.** Calculer les intégrales des fractions rationnelles suivantes

$$1) \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx, \quad 2) \int \frac{2dx}{x(x^2 + 1)}, \quad 3) \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}.$$

**Exercice 5.** Calculer les intégrales des fonctions trigonométriques

$$1) \int \cos^3(x) dx, \quad 2) \int \cos^2 x \sin^3 x dx, \quad 3) \int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) dx.$$

**Exercice 6.** En utilisant le changement de variable  $u = \tan(x/2)$ , calculer

$$1) \int \frac{dx}{\sin(x)}, \quad 2) \int \frac{dx}{2 + \cos(x)}.$$

## II) Intégrales définies.

**Exercice 7.** On note  $E(x)$  la partie entière du nombre  $x$ . Pour  $a > 0$ , soit  $n = E(a)$ . En utilisant la subdivision

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \dots, \quad x_n = n, \quad x_{n+1} = a,$$

calculer l'intégrale de  $\int_0^a E(x)dx$ .

**Exercice 8.** En interprétant les suites suivantes comme des sommes de Riemann, calculer leurs limites

$$1) U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad 2) U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}.$$

**Exercice 9.** Calculer les intégrales définies suivantes

$$1) \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad 2) \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx, \\ 3) \int_0^1 x^2 \arctan(x) dx, \quad 4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}.$$

**Exercice 10.** I) Calculer

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

et en déduire l'aire d'un disque de rayon  $R$ .

II) Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations  $y = \cos(x)$  et  $y = \sin(x)$  entre 0 et  $\pi/4$ .

**Exercice 11.** (Facultatif) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1) Calculer  $I_0, I_1$  et  $I_2$ .

2) Montrer que la suite  $(I_n)_n \in \mathbb{N}$  est décroissante. Est-elle convergente ?

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

4) En déduire que pour  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}, \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

**Exercice 12.** (Facultatif) Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int \frac{dx}{x \ln(x^2)} \quad 2) \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx \quad 3) \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} \\ 4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^n(x)}, n \in \mathbb{N}^* \quad 5) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)} dx$$