Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse2
Fiche de TD 2 : Développements limités

Exercice 1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x)$.

1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 4.
2) En déduire que $\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$.

Exercice 2. I) Calculer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x, \qquad 2) f(x) = \sin(x)\cos(2x),$$
$$3) f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right), \qquad 4) f(x) = \ln(1 + \sinh(x))$$

II) Calculer le développement limité des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \sqrt{x} \quad \text{au voisinage de 2 à l'ordre 3}$$
$$2) f(x) = \cos(x) \quad \text{au voisinage de } \frac{\pi}{6} \quad \text{à l'ordre 3.}$$

Exercice 3. En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}, \quad 2) \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}, \quad 3) \lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{7}{x})^x$$
$$4) \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)}, 5) \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}, \quad 6) \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}.$$

Exercice 4. 1) Donner le développement limité à l'ordre 4 a voisinage de 0 de $x \to \ln(\cos(x))$.

2) En déduire la limite suivante $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$

3) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f telle que $f(x) = \ln(\cos(x)) - \frac{2}{1+x}$ en $x = 0$ et préciser la position de T par rapport à la courbe au point 0.

Exercice 5. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$$

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la courbe de f par rapport à la tangente.

Exercice 6. (Facultatif) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2, montrer que 0.01 est une valeur approchée de $\sin(0.01)$ à 5×10^{-5} près.

Exercice 7. (Facultatif) Soit f une fonction deux fois continûment dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
1)En utilisant la formule de Taylor, calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

2) Si on suppose que la fonction f vérifie

$$f(x) + f(y) \geq 2f(\frac{x+y}{2}), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

alors, montrer que f' est croissante.
3) En utilisant le théorème des accroisements finis, montrer la réciproque de la question 2).

Exercice 8. (Facultatif)
1)Écrire la formule de Tayolor-Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.
3) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 9. (Facultatif)
Calculer le développement limité au voisnage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \quad 2) f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, \quad 3) f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x},$$

$$4) f(x) = \ln^3(1+x), \quad 5) f(x) = e^{\sin(x)}, \quad 6) f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

Exercice 10. (Facultatif)
Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \to 0} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x, \quad 2) \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)}, \quad 3) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2} - x},$$

$$4) \lim_{x \to 0} \frac{\cot(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)}, \quad 5) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(cos(3x))}, \quad 6) \lim_{x \to +\infty} \left(\cosh(\frac{1}{x^2})\right)^{x^2}$$

Exercice 11. (Facultatif)
Soit f la fonction définie par $x \mapsto f(x) = 2x + \sin(x)$.
1) Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2) Montrer que f est une bijection et que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe C^3. En déduire que f^{-1} à un développement limité à l'ordre 3.
3) On note $f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \circ(x^3)$ le développement limité de f^{-1} au voisinage de 0.
Déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3.