Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2021–2022

Analyse2
Fiche de TD 1 : Les fonctions élémentaires.

Exercice 1. 1) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}.$$

2) Montrer que

$$0 < \arctan(\frac{3}{4}) + \arctan(\frac{5}{12}) < \frac{\pi}{2}$$

3) Résoudre $\arcsin(x) = \arctan(\frac{3}{4}) + \arctan(\frac{5}{12})$.

Exercice 2. 1)Donner la dérivée des fonctions $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$.
2) En déduire que

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3. Les réels x et y étant liés par :$x = \ln[\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})]$.
Calculer $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

Exercice 4. 1) Calculer

$$\cosh(\frac{1}{2}\ln(3)) \qquad \sinh(\frac{1}{2}\ln(3)).$$

2) Montrer que

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y).$$

3) En déduire les solutions de l'équation

$$2\cosh(x) + \sinh(x) = \sqrt{3}\cosh(5x).$$

Exercice 5. Résoudre l'équation suivante

$$\ln(\cosh(x)) = 2.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Étudier la dérivabilité de f puis calculer f'.
3) Calculer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Exercice 7. (Facultatif)Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives

$$1) f(x) = \arctan(\frac{x}{1-x^2}), \qquad 2) f(x) = \tanh(\frac{1}{x}).$$

Exercice 8. (Facultatif) Résoudre les équations suivantes

$$1) \cosh(x) = \sqrt{5}, \qquad 2) \arcsin(x) = \arccos(\frac{1}{3}) - \arccos(\frac{1}{4}), \qquad 3) \arctan(\frac{x}{2}) = \pi.$$

Exercice 9. (Facultatif)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

2) Montrer que

$$\arccos(\frac{4}{5}) = 2\arctan(\frac{1}{3}).$$

Exercice 10. (Facultatif)

On considère l'équation suivante

$$\arctan(2x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x). \qquad (1)$$

1) Montrer que s'il y a des solutions, alors elles sont positives.
2) En utilisant la formule suivante

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)},$$

résoudre l'équation (1).

Exercice 11. (Facultatif)

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\tan(\arcsin(x^2)) = \tan(\arcsin(x))\sin(\arctan(x)).$$

Exercice 12. (Facultatif)

Simplifier chacune des expressions suivantes

$$1) \arccos(\cos(\alpha)) + \arcsin(\sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

$$2) \sin(\arccos(a) + 2\arctan(b)) \quad \text{où} \quad -1 \leq a \leq 1 \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$