Solution TD2 : Exercices facultatifs.

Ex6 : Soit $f : x \longmapsto \sin x$ et $x \in [0, 0.01]$

f est de classe C^1 sur $[0, 0.01]$ et de classe C^2 sur $]0, 0.01[$. Donc d'après le théorème de Taylor-Lagrange

$\exists c \in]0, 0.01[$ tel que

$\forall x \in [0, 0.01]$, $\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c)$.

On a : $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$\quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f''(c) = -\sin c$.

Donc, $\sin x = x + \frac{x^2}{2}(-\sin c)$.

Ainsi, pour $x = 0.01$, on a :

$\sin(0.01) = 0{,}01 + \frac{0{,}0001}{2}(-\sin c)$.

$\Rightarrow \left| \sin(0{,}01) - 0{,}01 \right| = 5 \cdot 10^{-5} |\sin c|$

$\Rightarrow \left| \sin(0{,}01) - 0{,}01 \right| \leq 5 \cdot 10^{-5}$

Donc, $0{,}01$ est une valeur approchée de $\sin(0{,}01)$ à $5 \cdot 10^{-5}$ près.

Ex 07 :

1) puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$ tels que

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x+\theta_1 h)$$

et $$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x-\theta_2 h).$$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+\theta_1 h)+f''(x-\theta_2 h)}{2}$$

Or $\lim_{h\to 0} f''(x+\theta_1 h) = \lim_{h\to 0} f''(x-\theta_2 h) = f''(x)$

(Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}$). Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = f''(x)$$

2) puisque f vérifie $f(x)+f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$,

alors $f(x+h)+f(x-h) \geq 2f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$ et par suite f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. supposons que $x \leq y$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à f sur les intervalles $\left[x, \frac{x+y}{2}\right]$ et $\left[\frac{x+y}{2}, y\right]$. Alors

$\exists c_1 \in \left]x, \frac{x+y}{2}\right[$ et $c_2 \in \left]\frac{x+y}{2}, y\right[$ tels que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) = \left(\frac{x+y}{2} - x\right) f'(c_1)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) = \left(\frac{y-x}{2}\right) f'(c_1) \quad \text{---} \; (*)$$

et $f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x}{2}\right) f'(c_2)$ .... $(**)$.

D'après $(*)$ et $(**)$, on a :

$$f(x)+f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x}{2}\right)\left(f'(c_2) - f'(c_1)\right)$$

Remarquons que puisque $c_1 \leq c_2$, alors

$f'(c_2) - f'(c_1) \geqslant 0$ (f' est croissante sur $\mathbb{R}$)

et $\frac{y-x}{2} \geqslant 0$ ($y \geqslant x$), alors

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x)+f(y) \geqslant 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Ex 08 :

1) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 en 0 de $\sin x$ est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(\theta x)$$, pour $\theta \in]0,1[$ dépendant de x.

2) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(\theta x)\right) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5!}\cos(\theta x) = 0$$

3) Soit $x \geqslant 0$. Il est facile de voir que puisque

$\cos(\theta x) \leq 1$, alors

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Montrons maintenant que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

posons $f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$.

On a $f(0) = 0$, alors si on montre que f est croissante

alors $f(x) \geq 0$.

Calculons $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

Notons que $f'(0) = 0$ et $f''(x) > 0$ car

$f^{(3)}(x) = -\sin x + x > 0$ ($\sin x < x$) et $f''(0) = 0$.

Ainsi, $f(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ d'où

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exo 9: ① $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} \cdot \ln(1+x)$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

② $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

On a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

et

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

Ainsi,

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4)$$

(3) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x}$.

On sait que $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$.

Alors

$$f(x) = (x^3+1)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\right)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 - \frac{69}{128}x^4 + o(x^4)$$

(4) $f(x) = \ln^3(x+1)$.

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Alors

$$\ln^3(x+1) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)^2\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= \left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$$

(5) $f(x) = e^{\sin x}$

On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

D'autre part, quand $x \to 0$, on a $\sin x \to 0$ et puisque le D.L de e^h au voisinage de 0 est :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + h^4\varepsilon(h), \text{ alors}$$

en posant $h = \sin x$, on a :

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon(x).$$

(6) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$.

On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 + x^4 \varepsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45} x^4 + x^4 \varepsilon(x).$$

Ex 10 :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x$, $a, b, c > 0$.

posons $t = \frac{1}{x}$. Alors quand $x \to +\infty$, on a $t \to 0$.

Donc,
$$a^{1/x} = a^t = e^{t \ln a} = 1 + t \ln a + \varepsilon(t)$$
$$b^{1/x} = b^t = e^{t \ln b} = 1 + t \ln b + \varepsilon(t)$$
et
$$c^{1/x} = c^t = e^{t \ln b} = 1 + t \ln c + \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Aussi,

$$\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x = x \ln\frac{1}{3}\left(a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\ln\left[\frac{1}{3}\left(3+(\ln a+\ln b+\ln c)t+\varepsilon(t)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\ln\left[1+\frac{t}{3}\ln(abc)+\varepsilon(t)\right].$$

D'autre part, on sait que

$\ln(1+h) = h+\varepsilon(h)$. posons $h=\frac{t}{3}\ln(abc)$

($h \to 0$ si $t \to 0$).

Alors

$$\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x = \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{3}\ln(abc)+\varepsilon(t)\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{t}{3}\ln(abc)\right]+\varepsilon(t) = \frac{1}{3}\ln(abc).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x = (abc)^{1/3}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = -1$$

(3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$$ posons $y=\frac{\pi}{2}-x$, alors

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{y\to 0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)^{y} = \lim_{y\to 0} (\sin y)^{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln(\sin y)} = \lim_{y\to 0} e^{y\ln\left(y-\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln\left[y\left(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)\right]} = \lim_{y\to 0} e^{y\ln y}\, e^{y\ln\left(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln y}\, e^{y\left(-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)} = \lim_{y\to 0} e^{y\ln y}\, e^{-\frac{y^3}{6}+o(y^3)}$$

$$= 1.$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = ?$

On sait que $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

Ainsi, $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$ et

$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)$

D'autre part, $\ln(1+h) = h + o(h)$. Donc,

$\ln(\cos(2x)) = \ln(1 - 2x^2 + o(x^2)) = -2x^2 + o(x^2)$

et $\ln(\cos(3x)) = \ln\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2+o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{4}{9}.$$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{x^2} = ?$ posons $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$..

Ainsi,

$$\left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{x^2} = \left(ch\, t^2\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\frac{1}{t^2} \ln(ch\, t^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{t^2} \ln\left(1 + \frac{t^4}{2!} + t^4 \varepsilon(t)\right)} = e^{\frac{1}{t^2}\left[\frac{t^4}{2} + t^4 \varepsilon(t)\right]}, \quad \varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$= e^{\frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{x^2} = \lim\limits_{t \to 0} e^{\frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)} = 1.$

EX M:

1) On a : $f(x) = 2x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

2) Remarquons que $f'(x) = 2 + \cos x > 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi,
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection.

$\Rightarrow f^{-1}$ existe et c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquons aussi que puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc admet un développement limité au voisinage de 0.

3) On a $f(0)=0$. Ceci implique qu'on peut appliquer la formule du D.L de f^{-1} à f au voisinage de 0.

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + a_2\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$+ a_3\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6}\right) + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3a_1x + a_2x^2 + \left(\frac{-a_1}{6} + a_3\right)x^3 + o(x^3) = x.$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1/3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1/18 \end{cases}$$

Ainsi,

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{18} + o(x^3).$$