Solution TD n°1 : Exercices facultatifs

Ex 07 : (1) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[:= D_f$.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2+x^2} > 0$

$\Rightarrow$ la fonction f est strictement croissante.

$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = ?$

On a :

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$ et $\operatorname{arctg} 0 = 0$

$$\lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

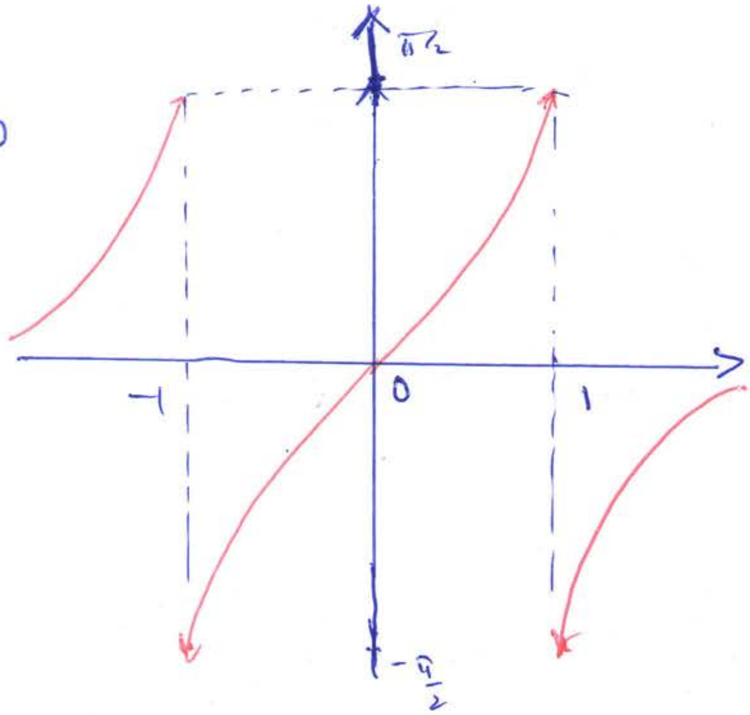
$$\lim_{x \to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, le tableau de variations de f est

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ || $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ || $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0

Le graphe de f $\longrightarrow$



(2) $f(x) = \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \neq 0,\quad f'(x) = \frac{\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'} = \frac{-\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\,\frac{\left[\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{x^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)} < 0$$

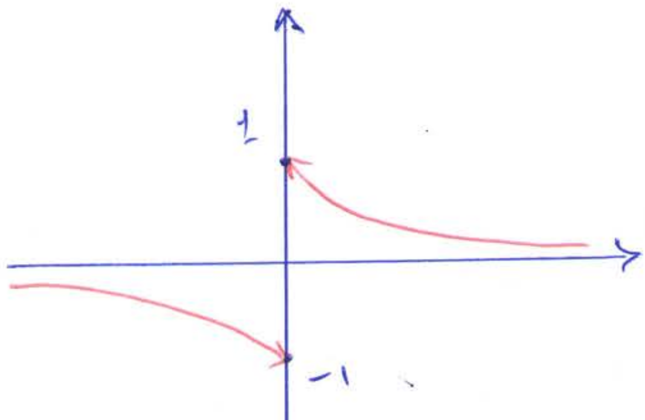
$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1 + e^{-2/x}\right)} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$. Ainsi, le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ -1	$\|\|$	1 $\searrow$	0



Le graphe de f.

Exo 8 :

1) $\operatorname{ch} x = \sqrt{5} \iff \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \sqrt{5}$

$$\iff e^{x}+e^{-x} = 2\sqrt{5}$$

$$\iff e^{2x} - 2\sqrt{5}\,e^{x} + 1 = 0$$

On pose $X = e^{2x}$, on obtient

$$X^2 - 2\sqrt{5}\,X + 1 = 0 \quad , \quad \Delta = 16$$

Donc, $X_1 = \sqrt{5}+2$, $X_2 = \sqrt{5}-2$

Ainsi, $e^{x_1} = \sqrt{5}+2$, $e^{x_2} = \sqrt{5}-2$

$\Rightarrow x_1 = \ln(\sqrt{5}+2)$, $x_2 = \ln(\sqrt{5}-2)$

2) $\arcsin x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

On a : $\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = x \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Remarquons que

$0 \leq \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} \leq -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \leq 0$, Donc, $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi,

$$x = \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) - \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{1}{3^2}}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\sqrt{1-\frac{1}{4^2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}.$$

3) $\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

La fonction arctg est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc cette équation n'a pas de solutions.

Ex 09 :

1) On a :

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos(2x).$$

2) On a :

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Comme $\frac{1}{3} > 0$ et arctg est croissante, alors

$$\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) < \pi$$

Ainsi, $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

Ex 10:

1) Si $x \leq 0$, alors $\mathrm{arctg}(2x) \leq 0$ et

$$\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}(2x) \geq \frac{\pi}{4}$$

Donc, il n'y a pas de solutions négatives.

2) On a :

$$0 < \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\mathrm{arctg}\,x < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{4}.$$

Donc, $\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi,

$$\mathrm{arctg}(2x) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x \Leftrightarrow 2x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}(x)\right).$$

Par conséquent,

$$2x = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)}{1 + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow 2x(1+x) = 1-x \Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0.$$

Ceci implique qu'il y a deux solutions

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

Puisque $x > 0$, alors la solution de l'équation est

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

EXM: 1) On a :

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

En posant $a = \arcsin x$ et $b = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ avec $x \in [0,1]$,

alors

$$\sin(\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin\sqrt{1-x^2}) + \sin(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))\cos(\arcsin x) \quad \text{----} \quad (*)$$

Remarquons que

$\forall x \in [0,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$ et $\sin(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.

Il reste les termes

$\cos(\arcsin x)$ et $\cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))$.

Alors,

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) \geq 0$

Sachant que

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, alors

$\forall x \in [0,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}$

$= \sqrt{1-x^2}$.

D'autre part,

$$\cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))}$$

$$= \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = x.$$

En remplaçant tous les termes dans (*), on aura :

$$\sin(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2})) = (\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}) + x\,x$$

$$= 1-x^2+x^2 = 1$$

Ainsi et puisque

$$0 \leq \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \pi \quad , \text{ alors}$$

$$\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Montrons que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad tg(\arcsin x^2) = tg(\arcsin x)\sin(\operatorname{arctg} x)$$

pour $x \in]-1,1[$, on a : $x^2 \in [0,1[$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \arcsin(x^2) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin(x^2)) > 0.$$

Sachant que

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad , \text{ alors}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin(x^2)) = \frac{\sin(\arcsin x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x^2))}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \quad \dots (1)$$

Maintenant, on va simplifier les termes $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ et $\sin(\operatorname{arctg} x)$. On a :

$\forall x \in]-1,1[$, $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arcsin x) > 0$

et $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(\operatorname{arctg} x) > 0$

Alors

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Rappelons que $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

et $\sin\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \;)$$

par conséquent,

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \quad \cdots (2)$$

En comparant (1) et (2), on conclut que

$\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{tg}(\arcsin(x^2)) = \operatorname{tg}(\arcsin x)\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Ex 12 : 1) Nous rappelons que

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0,\pi], \text{ alors } \arccos(\cos x) = x \\ \text{si } x \notin [0,\pi], \text{ alors } \arccos(\cos x) = \beta \text{ tel que} \\ \qquad \cos\beta = \cos x \text{ et } \beta \in [0,\pi]. \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \text{ alors } \arcsin(\sin x) = x \\ \text{si } x \notin [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \text{ alors } \arcsin(\sin x) = \gamma \text{ tel que} \\ \qquad \sin\gamma = \sin x \text{ et } \gamma \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Donc, nous simplifions $\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha)$, $\alpha \in [0,2\pi]$

on distinguons 4 cas :

1er cas : $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

$\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}] \subset [0,\pi] \Rightarrow \arccos(\cos\alpha) = \alpha$

$\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

2ème cas : $\alpha \in]\frac{\pi}{2},\pi]$

$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \subset [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos\alpha) = \alpha$

$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \alpha \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin\alpha) = \gamma$ tel que

$\sin\gamma = \sin\alpha$ et $\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Alors $\sin\gamma = \sin\alpha \Longrightarrow \gamma = \pi - \alpha$

Donc,

$\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = \alpha + \pi - \alpha = \pi$

3ème cas : $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}]$

$\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \alpha \notin [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos\alpha) = \beta$

tel que $\cos\beta = \cos\alpha$ et $\beta \in [0, \pi]$.

Ceci implique $\beta = 2\pi - \alpha$

D'autre part, $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \alpha \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \arcsin(\sin\alpha) = \gamma$ tel que

$\sin\gamma = \sin\alpha$ et $\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ceci implique que $\gamma = \pi - \alpha$.

Donc $\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi - \alpha + \pi - \alpha = 3\pi - 2\alpha$

4ème cas : $\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \Rightarrow \alpha \notin [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos\alpha) = \beta$ tel que

$\cos\beta = \cos\alpha$ et $\beta \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \beta = 2\pi - \alpha$

D'autre part,

$\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow \alpha \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin\alpha) = \gamma$ tel que

$\sin\gamma = \sin\alpha$ et $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \gamma = \alpha - 2\pi$

Donc,

$$\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi - \alpha + \alpha - 2\pi = 0$$

2) Simplifions $\sin(\arccos a + 2\arctg b)$ où $-1 \leq a \leq 1$ et $b \in \mathbb{R}$.

On sait que

$$\sin(\arccos a + 2\arctg b) = \sin(\arccos a)\cos(2\arctg b) + \sin(2\arctg b)\cos(\arccos a)$$

$$\left(\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \right).$$

Remarquons que $\forall a \in [-1, 1]$

$$\cos(\arccos a) = a.$$

On a aussi

$-1 \leq a \leq 1 \Rightarrow \quad 0 \leq \arccos a \leq \pi$

$\Rightarrow \sin(\arccos a) \geq 0$

Ainsi,

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos a)} = \sqrt{1-a^2}.$$

D'autre part, on peut remarquer que

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x$$
$$= 2\,tg\,x\cos^2 x$$

Sachant que $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x}$, alors

$$\boxed{\sin(2x) = \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2 x}}$$

Alors, pour tout $b\in\mathbb{R}$,

$$\sin(2\,arctg\,b) = \frac{2\,tg(arctg\,b)}{1+tg^2(arctg\,b)} = \frac{2b}{1+b^2}$$

De la même manière,

on a :

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Sachant que $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x}$, alors

$$\boxed{\cos(2x) = \frac{2}{1+tg^2 x} - 1 = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

Ainsi, pour tout $b\in\mathbb{R}$,

$$\cos(2\,arctg\,b) = \frac{1-tg^2(arctg\,b)}{1+tg^2(arctg\,b)} = \frac{1-b^2}{1+b^2}$$

En remplaçant tous les termes, on obtient :

$$\sin(\arccos a + 2\,arctg\,b) = \left(\sqrt{1-a^2}\right)\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right) + \left(\frac{2b}{1+b^2}\right)a = \frac{(1-b^2)\sqrt{1-a^2}+2ab}{1+b^2}$$