الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie
تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 / 4ème série de TD. (Les matrices)

Exercice 01 : Soient A, B et C des matrices définies par :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer tous les produits possibles :

$$AB, BA, A^tB, A^tC \text{ et } CB.$$

où A^t désigne la transposée de A.

Exercice 02 : Soit M une matrice définie par :

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer : M^3+2M^2-M-2I, où I est la matrice unité.

(2) Calculer : $\det M$ et déduire si M est inversible.

(3) Déterminer l'inverse de M par deux méthodes.

(4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3x+2y+2z=1 \\ -2x+5y+4z=7 \\ x-5y-4z=-8 \end{cases}$$

aiter dans le cours)

Calculer l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de Gauss et par la notion de la comatrice.

aiter dans le cours) On considère l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \quad &\mapsto \quad f(x,y,z)=(2x-y+z, 3x-y-z, 4x+y+z). \end{aligned}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 05 : On considère l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad f(x, y) = (x, y, x + y) . \end{aligned}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, avec $w_1 = (0, 1, 3)$, $w_2 = (-1, 0, 1)$ et $w_3 = (-2, -1, 0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement aux bases C_2 et C_3.

Exercice 06 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \quad &\mapsto \quad f(P) = P(0) X^3 + P'(0) X^2 + \frac{1}{2} P''(0) X + \frac{1}{6} P'''(0) . \end{aligned}$$

(1) Ecrire la matrice A associée à f dans la base canonique C de $\mathbb{R}_3[X]$.

(2) Soit $C' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ une autre base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $P_1 = 2$, $P_2 = 1 + X, P_3 = -2X + X^2$ et $P_4 = 2X^2 + X^3$.

a) Trouver la matrice de passage M de la base C à la base C'.

b) Déterminer la matrice de passage N de la base C' à la base C.

c) Trouver les composantes du polynôme $Q = 1 - X + 2X^2 + 5X^3$ dans C puis dans C'.

d) Trouver la matrice B associée à f relativement à la base C'.