الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 / 4ème série de TD. (Les matrices)

Exercice 01 : Soient A, B et C des matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer tous les produits possibles :

$$AB, BA, A^tB, A^tC \text{ et } CB.$$

où A^t désigne la transposée de A.

Solution : (1) $A \in M_{3,3}$ et $B \in M_{3,2}$, donc AB existe avec :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 31 \\ 12 & 62 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}.$$

(2) $B \in M_{3,2}$ et $A \in M_{3,3}$, donc BA n'existe pas.
(3) $A \in M_{3,3}$ et ${}^tB \in M_{2,3}$, donc A^tB n'existe pas.
(4) $A \in M_{3,3}$ et ${}^tC \in M_{3,2}$, donc A^tC existe avec :

$$A\,{}^tC = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 29 \\ 2 & 45 \\ 18 & 44 \end{pmatrix}.$$

(5) $C \in M_{2,3}$ et $B \in M_{3,2}$, donc CB existe avec :

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 7 & 60 \end{pmatrix}.$$

Exercice 02 : Soit M une matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer : $M^3 + 2M^2 - M - 2I$, où I est la matrice unité.

(2) Calculer : $\det M$ et déduire si M est inversible.

(3) Déterminer l'inverse de M par deux méthodes.

(4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + 2y + 2z = 1 \\ -2x + 5y + 4z = 7 \\ x - 5y - 4z = -8 \end{cases}$$

<u>*Solution :*</u> (1)

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}. \\ M^3 &= M^2 M = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & M^3 + 2M^2 - M - 2I \\ &= \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -3\,(-20 + 20) - 2\,(8 - 4) + 2\,(10 - 5) = 2. \end{aligned}$$

$$\det M \neq 0 \Rightarrow M \text{ est inversible.}$$

(3) **1ère méthode :**

$$\begin{aligned} comM &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 10 & -13 \\ -2 & 8 & -11 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, {}^t comM = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & 10 & 8 \\ 5 & -13 & -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ \frac{5}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{-11}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2ème méthode :

$$
\begin{aligned}
M^3+2M^2-M-2I &= 0 \mapsto \text{ matrice nulle d'ordre 3}\\
&\Rightarrow M^3+2M^2-M=2I \Rightarrow \frac{1}{2}M^3+M^2-\frac{1}{2}M=I\\
&\Rightarrow M\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(M^2+2M-I\right)\right]}_{=M^{-1}}=\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(M^2+2M-I\right)\right]}_{=M^{-1}}M=I\\
&\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{2}\left(M^2+2M-I\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & -2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 1 & -5 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ -2 & 5 & 4\\ \frac{5}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{-11}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{cases} -3x+2y+2z=1\\ -2x+5y+4z=7\\ x-5y-4z=-8\end{cases} \Leftrightarrow MX=B,
$$

sachant que :

$$
X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1\\ 7\\ -8\end{pmatrix},
$$

donc :

$$
X=M^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ -2 & 5 & 4\\ \frac{5}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{-11}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 7\\ -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.
$$

aiter dans le cours)

Calculer l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ par la méthode de Gauss et par la notion de la comatrice.

__Solution :__ **(1) (a)** par la méthode de GAUSS.

Type d'opération sur la ligne (L_i)	$A \to$	$I \to$
L_1 L_2 L_3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
L_1 $L_2 + L_1$ $L_3 - 4L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 - \frac{1}{2}L_2$ $L_3 + \frac{3}{4}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 + \frac{4}{15}L_3$ $L_2 - \frac{4}{15}L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-11}{30} & \frac{-9}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{28}{15} & \frac{12}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{13}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$
 $\frac{L_2}{4}$ $\frac{2L_3}{15}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-11}{30} & \frac{-9}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{3}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{26}{15} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = A^{-1}.$

(b) par la notion de la comatrice :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 28 + 13 = 30 \neq 0, \end{aligned}$$

alors :

$$comA = \begin{pmatrix} -11 & 14 & -13 \\ -9 & 6 & 3 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t comA = \begin{pmatrix} \frac{-11}{30} & -\frac{9}{30} & \frac{8}{30} \\ \frac{14}{30} & \frac{6}{30} & -\frac{2}{30} \\ -\frac{13}{30} & \frac{3}{30} & \frac{4}{30} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{30} & \frac{-9}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{3}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{26}{15} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

aiter dans le cours) On considère l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad &\mapsto \quad f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z, 4x + y + z). \end{aligned}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

<u>*Solution :*</u>

(1) Trouvons la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

$$f(e_1) = (2,3,4)\,, f(e_2) = (-1,-1,1) \text{ et } f(e_3) = (1,-1,1)\,,$$

alors :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .$$

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)$.

a) Trouvons la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .$$

b) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminons alors les composantes de V dans la base B_1.

$$V_{B_1} = P^{-1}\, V_B,$$

calculons alors la matrice inverse de P :

$$\det P = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5,$$

la comatrice est :

$$comP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^t (comP) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t(com\ P) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V_{B_1} = P^{-1}\, V_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -5 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

c) Trouvons la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

$$\begin{aligned} N &= P^{-1}MP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{5} & -\frac{16}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{65}{5} & \frac{25}{5} & -\frac{15}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{22}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>Exercice 05 :</u> On considère l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \quad &\mapsto \quad f(x,y) = (x, y, x+y). \end{aligned}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, avec $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (-1,0,1)$ et $w_3 = (-2,-1,0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement aux bases C_2 et C_3.

<u>Solution :</u>

(1) Donnons la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,0,1) \text{ et } f(e_2) = f(0,1) = (0,1,1)$$

alors :

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}.$$

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

avec $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (-1,0,1)$ et $w_3 = (-2,-1,0)$.

a) Trouvons la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}.$$

b) Déterminons la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}.$$

c) Si V est de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminons alors les composantes de V dans la base C_3.

$$V_{C_3} = Q^{-1} V_{B_3}.$$

Calculons alors la matrice inverse de Q :

$$\det Q = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

la comatrice est :

$$comQ = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^t (comQ) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}{}^t (com\ Q) \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{C_3} = Q^{-1} V_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

d) Trouvons la matrice N associée à f relativement aux bases C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} N(f, C_2, C_3) &= Q^{-1} M P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 06 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & f(P) = P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0). \end{array}$$

(1) Ecrire la matrice A associée à f dans la base canonique C de $\mathbb{R}_3[X]$.

(2) Soit $C' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ une autre base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $P_1 = 2$, $P_2 = 1 + X, P_3 = -2X + X^2$ et $P_4 = 2X^2 + X^3$.

a) Trouver la matrice de passage M de la base C à la base C'.

b) Déterminer la matrice de passage N de la base C' à la base C.

c) Trouver les composantes du polynôme $Q = 1 - X + 2X^2 + 5X^3$ dans C puis dans C'.

d) Trouver la matrice B associée à f relativement à la base C'.

Solution : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & f(P) = P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0). \end{array}$$

Remarque :

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, X, X^2\}$ et la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\{1, X, X^2, X^3\}$.

(1) La matrice associée à f dans la base canonique $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ telle que :

$$e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2 \text{ et } e_4 = X^3,$$

$$\begin{array}{l} f(1) = X^3 = (0 \times 1) + (0 \times X) + (0 \times X^2) + (1 \times X^3), \\ f(X) = X^2 = (0 \times 1) + (0 \times X) + (1 \times X^2) + (0 \times X^3), \\ f(X^2) = X = (0 \times 1) + (1 \times X) + (0 \times X^2) + (0 \times X^3), \\ f(X^3) = 1 = (1 \times 1) + (0 \times X) + (0 \times X^2) + (0 \times X^3), \end{array}$$

donc la matrice associée à f dans la base canonique C est :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

(2) Soient $C' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $P_1 = 2$, $P_2 = 1+X, P_3 = -2X+X^2$ et $P_4 = 2X^2 + X^3$.

a) Trouvons la matrice de passage M de la base C à la base C'.

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

b) Déterminons la matrice de passage N de la base C' à la base C.

1ère méthode :

$$N = M^{-1}.$$

2ème méthode :

$$P_1 = 2, P_2 = 1 + X, P_3 = -2X + X^2 \text{ et } P_4 = 2X^2 + X^3,$$

alors :

$$\begin{aligned} P_1 &= 2e_1 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}P_1, \\ P_2 &= e_1 + e_2 \Rightarrow e_2 = P_2 - e_1 = -\frac{1}{2}P_1 + P_2, \\ P_3 &= -2e_2 + e_3 \Rightarrow e_3 = P_3 + 2e_2 = P_3 + 2P_2 - P_1, \\ P_4 &= 2e_3 + e_4 \Rightarrow e_4 = P_4 - 2e_3 = P_4 - 2P_3 - 4P_2 + 2P_1, \end{aligned}$$

alors la matrice de passage N de la base C' à la base C est :

$$N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Pv_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \end{array}.$$

Sachant que N est exactement M^{-1} qu'on peut la calculer par la méthode de Gauss ou la notion de la comatrice.

c) Trouvons les composantes de $Q = 1 - X + 2X^2 + 5X^3$ dans C puis dans C'.

i) Dans la base C :

$$Q_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

ii) Dans la base C' :

$$\begin{aligned}
V_{C'} &= NV_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -17 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d) Trouvons la matrice B la matrice associée à f relativement à C'.

$$\begin{aligned}
B(f, C') &= M^{-1}AM = NAM \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -8 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$