Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 / 3ème série de TD. (Les espaces vectoriels)

<u>**Exercice 01 :**</u> Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v?

$$\begin{aligned}
(1)A &= \left\{\left(x,x^2\right); x\in\mathbb{R}\right\} \quad (2)B=\{(x,ax+b)\,; x\in\mathbb{R}\}, \; a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}\\
(3)C &= \left\{(x,y)\,; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\ x^2+y^2\leq 1\right\}.\\
(4)\ D &= \{f\in E_1; f(0)=f'(0)=\ 0\}.(E_1=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ l'ensemble des fonctions dérivables})\\
(5)\ G &= \{P\in\mathbb{R}_n[X]\,/\ P'=3\}.
\end{aligned}$$

Rappel : $F \underset{\text{s.e.v}}{\subset} E \Leftrightarrow \begin{cases} 1)F\neq\emptyset \longrightarrow \text{Voir l'élément neutre}\\ 2)\forall u_1,u_2\in F, u_1+u_2\in F.\\ 3)\forall u\in F, \forall\alpha\in\mathbb{R}, \alpha u\in F.\end{cases}$

(1) $A=\{(x,x^2)\,; x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous espace vectoriel car :

$$(2,4),(3,9)\in A \text{ mais } (2,4)+(3,9)=(5,13)\notin A.$$

ou bien (une autre méthode)

$$u(1,1)=\left(1,1^2\right), \alpha=3\Rightarrow\alpha u=(3,3)\notin A.$$

(2) $B=\{(x,ax+b)\,; x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$.

$$x=0\leftarrow(0,0)\in B? \text{ mais } (0,a\times 0+b)=(0,b)$$

<u>1er cas :</u> Si $b\neq 0$ on a $(0,0)\notin B$ alors B n'est pas un sous espace vectoriel car tout s.e.v doit contenir l'élément neutre de l'espace.

<u>2ème cas :</u> Si $b=0$ alors : $B=\{(x,ax)\,; x\in\mathbb{R}\}$.

a) $(0,0)=(0,a\times 0)\in B\Rightarrow B\neq\varnothing$.

b) Si $u_1,u_2\in B\Rightarrow u_1=(x_1,ax_1)$ et $u_2=(x_2,ax_2)\Rightarrow u_1+u_2=\left(\underbrace{x_1+x_2}_{X}, a\underbrace{(x_1+x_2)}_{X}\right)\in B$.

c) Si $u\in B,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha u=\left(\underbrace{\alpha x}_{X}, a\underbrace{(\alpha x)}_{X}\right)\in B$.

Conclusion: B est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $b=0$.

(3) $C=\{(x,y)\,;x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\ x^2+y^2\leq 1\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$car :

1ère méthode :

$$u_1(0,1),u_2(1,0)\in C,\text{ mais } u_1+u_2(1,1)\notin C\left(1^2+1^2=2>1\right)$$

2ème méthode :

$$(1,0)\in C\text{ mais } 4\times(1,0)=(4,0)\notin C.\left(4^2+0^2=4>1\right)$$

(9) $D=\{f\in E_1;f(0)=f'(0)=0\}$.($E_1=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables)

a) Pour la fonction nulle $f_0(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f_0(0)=f_0'(0)=0\Rightarrow f_0\in D\Rightarrow D\neq\varnothing.$$

b) Soient f_1 et $f_2\in D$ alors :

$$(f_1+f_2)(0)=\underbrace{f_1(0)}_{=0}+\underbrace{f_2(0)}_{=0}=0$$

et

$$(f_1'+f_2')(0)=\underbrace{f_1'(0)}_{=0}+\underbrace{f_2'(0)}_{=0}=0,$$

alors :

$$f_1+f_2\in D.$$

c) Soient $f\in D$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors :

$$(\alpha f)(0)=\alpha\times\underbrace{f(0)}_{=0}=0,$$

et

$$(\alpha f')(0)=\alpha\times\underbrace{f'(0)}_{=0}=0,$$

alors :

$$\alpha f\in D.$$

Conclusion :

$$D\underset{\text{s.e.v}}{\subset}E_1.$$

(10) $G=\{P\in\mathbb{R}_n[x]\,/P'=3\}$ n'est pas un s.e.v car :
Le polynôme nul P_0 $(\forall x\in\mathbb{R},p_0(x)=0)$ n'appartient pas à G car $P_0'=0\neq 3$.

Exercice 02 :

(1) Ecrire le vecteur $v=(1,-2,5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs :

$$v_1=(1,1,1)\,,v_2=(1,2,3)\ \text{ et } v_3=(2,-1,1)\,.$$

C'est-à-dire écrire le vecteur v en fonction des vecteurs v_1,v_2 et v_3?

existe-il des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3?$$

$$\begin{aligned}
&(1,-2,5) = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,2,3) + \alpha_3 (2,-1,1) \\
&\Rightarrow (1,-2,5) = (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 ....(1) \\ -2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 ....(2) \\ 5 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 ....(3) \end{array} \right. \\
&(2) + (3) \text{ et } 2 \times (2) + (1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = -3 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \alpha_1 = -6, \alpha_2 = 3 \text{ et } \alpha_3 = 2,
\end{aligned}$$

donc :

$$v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3.$$

(2) Ecrire le vecteur $u = (2,-5,3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs :

$$u_1 = (1,-3,2), u_2 = (2,-6,1) \text{ et } u_3 = (1,-5,7).$$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que : $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$.

$$\begin{aligned}
&(2,-5,3) = \alpha_1 (1,-3,2) + \alpha_2 (2,-6,1) + \alpha_3 (1,-5,7) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 ....(1) \\ -5 = -3\alpha_1 - 6\alpha_2 - 5\alpha_3 ....(2) \\ 3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 ....(3) \end{array} \right. \\
&(1) + (2) + (3) \Rightarrow -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3, \\
&(2) + 3 \times (1) \Rightarrow -2\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = -\tfrac{1}{2} = \alpha_3, \\
&\Rightarrow \alpha_1 = 2 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{7}{2},
\end{aligned}$$

d'où :

$$u = \frac{7}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3.$$

(3) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels, les vecteurs suivants forment-ils une famille génératrice de E?

Dans tous les cas F est formé par les vecteurs donnés.

$$\begin{array}{l}
a)\ P = 2X^2 - 3X + 1 \text{ et } Q = X + 2. \\
b)\ P = 2X^2 - 5,\ Q = 7X \text{ et } R = 3X^2 + 4. \\
c)\ P = 1, Q = X \text{ et } R = X(X-1).
\end{array}$$

a)

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{R}_2[X] &= 3 \text{ et } cardF = 2 \Rightarrow cardF < \dim \mathbb{R}_2[X] \\
&\Rightarrow F \text{ n'est pas une famille génératrice.}
\end{aligned}$$

b) $P_1 = 2X^2 - 5$, $P_2 = 7X$ et $P_3 = 3X^2 + 4$.

$\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de E, équivalent à dire que :

$$\forall P \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3,$$

donc :

$$\begin{array}{l} P = aX^2 + bX + c = \alpha_1 \left(2X^2 - 5\right) + \alpha_2 \left(7X\right) + \alpha_3 \left(3X^2 + 4\right) \\ \Rightarrow aX^2 + bX + c = \left(2\alpha_1 + 3\alpha_3\right) X^2 + \left(7\alpha_2\right) X + \left(-5\alpha_1 + 4\alpha_3\right) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2\alpha_1 + 3\alpha_3 ... (1) \\ b = 7\alpha_2 \\ c = -5\alpha_1 + 4\alpha_3 ... (3) \end{array} \right. \\ 5 \times (1) + 2 \times (3) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{23} \left(5a + 2c\right). \\ 4 \times (1) - 3 \times (2) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{23} \left(4a - 3c\right) \text{ et } \alpha_2 = \frac{b}{7}. \end{array}$$

Ce qui implique que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de E.

$b)$ $\{P, Q, R\}$ est une famille génératrice de $E \Leftrightarrow$

$$\forall M \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } M = \alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R,$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} M & = & aX^2 + bX + c = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X \left(X - 1\right) \\ & \Rightarrow & aX^2 + bX + c = \alpha_3 X^2 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) X + \alpha_1 \\ & \Rightarrow & \alpha_1 = c, \alpha_3 = a \text{ et } \alpha_2 = b + a. \end{array}$$

Ce qui implique que $\{P, Q, R\}$ est une famille génératrice de E.

<u>Exercice 03 :</u> (1) Dans $\mathbb{R}^4$, Soient les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{e_1, e_2\}$? pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{e_1, e_2\}$?

(2) a) Soit a un nombre réel. Pour quelles valeurs de a, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, a), v_2 = (2, 1, a) \text{ et } v_3 = (3a, 0, 1),$$

forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

b) Discuter suivant les valeurs de a, la dimension de $A = Vect\ \{v_1, v_2, v_3\}$.

(3) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que les familles suivantes sont libres :

$$F_1 = \{x, e^x\}, F_2 = \{x, \sin x\} \text{ et } F_3 = \{\sin x, \cos x\}.$$

<u>Exercice 04 :</u> $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et P_3 le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 3\}$.

(1) Montrer que P_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(2) Soient les polynômes $Q_0 = 1, Q_1 = 1 - X, Q_2 = X - X^2$ et $Q_3 = X^2 - X^3$.

a) Vérifier que $B_2 = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une base de P_3.

b) Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 1 + 5X - 3X^2 - X^3$ dans la base B_2.

Exercice 05 : Soient:

$$E_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\},\ E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\right\} \text{ et } E_3 = \{(0,0,c)\,; c \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que E_i avec $i = 1,2,3$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est-elle directe?

Exercice 06 : Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3/\ a,b \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3/\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(1) Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

* Montrons que E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
i) $(0,0,0) = (0+0, 0-3\times 0, 0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \varnothing$.
ii) $\forall u_1\left(a_1+b_1, b_1-3a_1, a_1\right), u_2\left(a_2+b_2, b_2-3a_2, a_2\right)$:

$$u_1 + u_2 = \left(\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right), \left(b_1+b_2\right)-3\left(a_1+a_2\right), \left(a_1+a_2\right)\right) \in E_1$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u\left(a+b, b-3a, a\right)$:

$$\alpha u = \left((\alpha a)+(\alpha b), (\alpha b)-3(\alpha a), (\alpha a)\right) \in E_1.$$

Conclusion :

$$E_1 \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^3.$$

* Montrons que E_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
i) $(0,0,0) = (0, -2\times 0, 0) \in E_1 \Rightarrow E_2 \neq \varnothing$.
ii) $\forall u_1\left(c_1, -2c_1, c_1\right), u_2\left(c_2, -2c_2, c_2\right)$:

$$u_1 + u_2 = \left(\left(c_1+c_2\right), -2\left(c_1+c_2\right), \left(c_1+c_2\right)\right) \in E_2$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u\left(c, -2c, c\right)$:

$$\alpha u = \left((\alpha c), -2(\alpha c), (\alpha c)\right) \in E_2.$$

Conclusion :

$$E_2 \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^3.$$

(2) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

* Déterminons une base B_1 de E_1 :

$$\begin{aligned}
\forall u &\in E_1, u = (a+b, b-3a, a) \\
&= (a, -3a, a) + (b, b, 0) \\
&= a\underbrace{(1,-3,1)}_{V_1} + b\underbrace{(1,1,0)}_{V_2} \\
&\Rightarrow \{V_1, V_2\} \text{ est une famille génératrice de } E_1 \\
&\quad \text{ ou dire } \{V_1, V_2\} \text{ engendre } E_1.
\end{aligned}$$

IL suffit de vérifier que $\{V_1, V_2\}$ est libre?

$$\begin{aligned}
\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 &= (0,0,0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 (1,-3,1) + \alpha_2 (1,1,0) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - 3\alpha_1, \alpha_1) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - 3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\
&\Rightarrow \{V_1, V_2\} \text{ est libre} \\
&\Rightarrow B_1 = \{V_1, V_2\} \text{ est une base de } E_1.
\end{aligned}$$

* Déterminons une base B_2 de E_2 :

$$\begin{aligned}
\forall u &\in E_2, u = (c, -2c, c) \\
&= c\underbrace{(1,-2,1)}_{V_3} \\
&\Rightarrow \{V_3\} \text{ est une famille génératrice de } E_2 \\
&\quad \text{ ou dire } \{V_3\} \text{ engendre } E_2. \\
&\Rightarrow \{V_3\} \text{ est une une base de } E_2
\end{aligned}$$

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = card\ B_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = card\ B_2 = 1.$$

(4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

* Montrons que : $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$?

$$E_1 \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

* Montrons que : $\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$? c'est-à-dire :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u \in E_1 + E_2?$$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$\begin{array}{rcl} u & = & (x,y,z) = (a+b, b-3a, a) + (c, -2c, c) \\ & = & (a+b+c, b-3a-2c, a+c) \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a+b+c = x...(1) \\ b-3a-2c = y...(2) \\ a+c = z...(3) \end{array} \right. \\ (1)-(3) & \Rightarrow & b = x - z. \\ (2) & \Rightarrow & -3a-2c = y-x+z...(4) \\ 3\times(3)+(4) & \Rightarrow & c = y-x+4z \\ & \Rightarrow & a = z-(y-x+4z) = -y+x-3z. \end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & \underbrace{([z-(y-x+4z)]+[x-z], [x-z]-3[z-(y-x+4z)], [z-(y-x+4z)])}_{\in E_1} \\ & & +\underbrace{([y-x+4z], -2[y-x+4z], [y-x+4z])}_{\in E_2} \end{array}$$

Conclusion :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

Rappel :

$$u \in E_1 + E_2 \Leftrightarrow \exists u_1 \in E_1, u_2 \in E_2 \text{ tel que : } u = u_1 + u_2.$$

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

* Vérifions si :

$$E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}.$$

i) " $\supset$ " :

$$(0,0,0) \in E_1 \text{ et } (0,0,0) \in E_2 \Rightarrow (0,0,0) \in E_1 \cap E_2.$$

ii) " $\subset$ " :

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } u & \in & E_1 \cap E_2 \Rightarrow u \in E_1 \text{ et } u \in E_2 \\ & \Rightarrow & u = (a+b, b-3a, a) = (c, -2c, c) \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a+b = c...(1) \\ b-3a = -2c...(2) \\ a = c...(3) \end{array} \right. \\ (1)-(3) & \Rightarrow & b = 0 \Rightarrow -3a = -2c \text{ et } -3a = -3c \\ & \Rightarrow & a = c = 0 \\ & \Rightarrow & u = (0,0,0). \\ & \Rightarrow & E_1 \cap E_2 \subset \{(0,0,0)\} \\ & \Rightarrow & E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}. \end{array}$$

Puisque :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ \text{et} \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}. \end{cases}$$

ou dire :

$$\begin{cases} \dim \mathbb{R}^3 = \dim E_1 + \dim E_2 \\ \text{et} \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}. \end{cases}$$

Alors la somme est directe c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

Ou dire que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 07 : Dans $\mathbb{R}_8[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 8. On pose : $E_0 = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ P(0) = 0\}$, $E_p = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ \forall X \in \mathbb{R}, \ P(X) = P(-X)\}$ $E_i = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ P(X) = -P(-X)\}$.

(1) Montrer que E_0, E_P et E_i sont des s.e.v de $\mathbb{R}_8[X]$.

* Montron que : E_0 est un s.e.v de $\mathbb{R}_8[X]$.

On pose :

$$P_0(X) = 0, \forall X \in \mathbb{R} \text{ (le polynôme nul).}$$

i) $P_0(0) = 0 \Rightarrow P_0 \in E_0 \Rightarrow E_0 \neq \varnothing$.

ii) $\forall P_1, P_2 \in E_0 \Rightarrow P_1(0) = P_2(0) = 0$, alors :

$$(P_1 + P_2)(0) = \underbrace{P_1(0)}_{=0} + \underbrace{P_2(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 \in E_0.$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall P \in E_0$:

$$(\alpha P)(X) = \alpha \times \underbrace{P(X)}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha P \in E_0.$$

* Montron que : E_p est un s.e.v de $\mathbb{R}_8[X]$.

i) $\forall X \in \mathbb{R}, P_0(X) = P_0(-X) = 0 \Rightarrow P_0 \in E_p$.

ii) $\forall P_1, P_2 \in E_p \Rightarrow P_1(X) = P_1(-X)$ et $P_2(X) = P_2(-X)$, alors :

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)(X) &= P_1(X) + P_2(X) \\ &= P_1(-X) + P_2(-X) = (P_1 + P_2)(-X) \\ &\Rightarrow P_1 + P_2 \in E_p. \end{aligned}$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall P \in E_p$:

$$(\alpha P)(X) = \alpha P(X) = \alpha P(-X) = (\alpha P)(-X) \Rightarrow \alpha P \in E_p.$$

* Montron que : E_i est un s.e.v de $\mathbb{R}_8[X]$.

i) $\forall X \in \mathbb{R}, P_0(X) = -P_0(-X) = 0 \Rightarrow P_0 \in E_i$.

ii) $\forall P_1, P_2 \in E_i \Rightarrow P_1(X) = -P_1(-X)$ et $P_2(X) = -P_2(-X)$, alors :

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)(X) &= P_1(X)+P_2(X)\\ &= -P_1(-X)-P_2(-X) = -(P_1+P_2)(-X)\\ &\Rightarrow P_1+P_2 \in E_i.\end{aligned}$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall P \in E_i$:

$$(\alpha P)(X) = \alpha P(X) = \alpha[-P(-X)] = -(\alpha P)(-X) \Rightarrow \alpha P \in E_i.$$

(2) Montrons que : $\mathbb{R}_8[X] = E_0 + E_p$ et $\mathbb{R}_8[X] = E_i + E_p$.

* Montrons que : $\mathbb{R}_8[X] = E_0 + E_p$?

" $\supset$ " Montrons que : $E_0 + E_p \subset \mathbb{R}_8[X]$?

$$E_0 \subset \mathbb{R}_8[X] \text{ et } E_p \subset \mathbb{R}_8[X] \Rightarrow E_0 + E_p \subset \mathbb{R}_8[X].$$

" $\subset$ " Montrons que : $\mathbb{R}_8[X] \subset E_0 + E_p$?

$$\forall P \in \mathbb{R}_8[X] \Rightarrow P(X) = \underbrace{a_0}_{\in E_p} + \underbrace{a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_8X^8}_{\in E_0},$$

car si on pose :

$$P_1(X) = a_0, \forall X \in \mathbb{R} \Rightarrow P_1(-X) = P_1(X) = a_0 \Rightarrow P_1 \in E_p,$$

et

$$P_2(X) = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_8X^8 \Rightarrow P_2(0) = 0 \Rightarrow P_2 \in E_0.$$

* Montrons que : $\mathbb{R}_8[X] = E_p + E_i$?

" $\supset$ " Montrons que : $E_p + E_i \subset \mathbb{R}_8[X]$?

$$E_p \subset \mathbb{R}_8[X] \text{ et } E_i \subset \mathbb{R}_8[X] \Rightarrow E_i + E_p \subset \mathbb{R}_8[X].$$

" $\subset$ " Montrons que : $\mathbb{R}_8[X] \subset E_p + E_i$?

$$\begin{aligned}\forall P &\in \mathbb{R}_8[X] \Rightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_8X^8\\ &= \underbrace{a_0 + a_2X^2 + a_4X^4 + a_6X^6 + a_8X^8}_{\in E_p} + \underbrace{a_1X + a_3X^3 + a_5X^5 + a_7X^7}_{\in E_i},\end{aligned}$$

car si on pose :

$$\begin{aligned}P_1(X) &= a_0 + a_2X^2 + a_4X^4 + a_6X^6 + a_8X^8\\ &\Rightarrow P_1(-X) = P_1(X) \Rightarrow P_1 \in E_p,\end{aligned}$$

et

$$P_2(X) = a_1X + a_3X^3 + a_5X^5 + a_7X^7 \Rightarrow P_2(-X) = -P_2(X) \Rightarrow P_2 \in E_i.$$

(3) Dans quel cas la somme est directe?

1er cas : La somme est directe si et seulemnt si :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_8[X] = E_0 + E_p \\ \text{et} \\ E_0 \cap E_p = \{P_0\} \end{cases}$$

Vérifions si : $E_0 \cap E_p \subset \{P_0\}$?

Soit $P \in E_0 \cap E_p$ alors :

$$P \in E_0 \text{ et } P \in E_p \Rightarrow P(0) = 0 \text{ et } P(-X) = P(X), \forall X \in \mathbb{R},$$

alors le polynôme nul P_0 n'est pas le seul qui vérifie ces deux conditions, par exemple on prend le plynôme $P(X) = X^2$, donc :

$$E_0 \cap E_p \neq \{P_0\} \Rightarrow \text{La somme n'est pas directe.}$$

2ème cas : La somme est directe si et seulemnt si :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_8[X] = E_p + E_i \\ \text{et} \\ E_p \cap E_i = \{P_0\} \end{cases}$$

Vérifions si : $E_p \cap E_i \subset \{P_0\}$?

Soit $P \in E_p \cap E_i$ alors :

$$\begin{aligned} P &\in E_p \text{ et } P \in E_i \Rightarrow P(-X) = P(X) \text{ et } P(-X) = -P(X), \forall X \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow P(X) = -P(X), \forall X \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow P(X) = 0, \forall X \in \mathbb{R} \text{ (qui est } P_0) \\ &\Rightarrow E_p \cap E_i = \{P_0\} \text{ car } \{P_0\} \subset E_p \cap E_i, \\ &\Rightarrow \text{La somme est directe.} \end{aligned}$$

<u>Exercice 08 :</u> (1) Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

a) $F_1 = vect\{u, v, w\}$ où $u = (-2, 4, 1), v(1, 2, 1)$ et $w = (-3, 2, 0)$.

b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y + 3z = 0\}$.

(2) Déterminer un supplémentaire de $G_3 = vect\{u_3\}$ avec $u_3(2, 1, 1)$.

<u>Solution :</u> Rappel : La notation :

$$\begin{aligned} F_1 &= vect\{u, v, w\} \text{ est le sous espace engendré par les vecteurs } u, v, w. \\ \text{ou écrire } F_1 &= lin\{u, v, w\}. \end{aligned}$$

a) $F_1 = vect\{u, v, w\}$ où $u = (-2, 4, 1), v(1, 2, 1)$ et $w = (-3, 2, 0)$.

1ère méthode : Vérifions si les vecteurs $\{u, v, w\}$ sont libres?

$$\begin{aligned}
\text{Soient } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &\in \mathbb{R}, \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 (-2,4,1) + \alpha_2 (1,2,1) + \alpha_3 (-3,2,0) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \text{ avec } \alpha_1 = -\alpha_2 \\
&\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_2 (-1,1,1), \alpha_2 \in \mathbb{R}^*. \\
&\Rightarrow \text{ les vecteurs } \{u, v, w\} \text{ sont liés.}
\end{aligned}$$

Alors $\{u, v, w\}$ n'est pas une base de F_1. Donc :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w &= (0,0,0) \Leftrightarrow -\alpha_2 u + \alpha_2 v + \alpha_2 w = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \alpha_2 (-u + v + w) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}. \\
&\Rightarrow (-u + v + w) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow u = v + w \\
&\Rightarrow F_1 = vect\{u, v, w\} \\
&\Rightarrow F_1 = vect\{v + w, v, w\} \\
&\Rightarrow F_1 = vect\{v, w\}.
\end{aligned}$$

Vérifions si les vecteurs $\{v, w\}$ sont libres?

$$\begin{aligned}
\text{Soient } \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R}, \alpha_1 v + \alpha_2 w = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 (1,2,1) + \alpha_2 (-3,2,0) = (0,0,0) \\
&\quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \{v, w\} \text{ est une famille libre.} \\
&\Rightarrow B_1 = \{v, w\} \text{ est une base de } F_1.
\end{aligned}$$

2ème méthode :

Vérifions si $\{u, v, w\}$ est libre ou non?
$u = (-2,4,1), v(1,2,1)$ et $w = (-3,2,0)$
On remarque que :

$$u - v = w \Rightarrow \{u, v, w\} \text{ est liée} \Rightarrow F_1 = Vect\{u, v\},$$

Vérifions si les vecteurs $\{u, v\}$ sont libres?

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 u + \alpha_2 v = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 (-2,4,1) + \alpha_2 (1,2,1) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow (-2\alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_2 + \alpha_2 = 0 \\
&\Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\{u, v\}$ est une famille libre donc une base d'où :

$$\dim F_1 = 2.$$

Déterminons un s.e.v G_1 supplémentaire à F_1 dans $\mathbb{R}^3$.
Rappel : F_1 et G_1 sont supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim F_1 + \dim G_1 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ F_1 \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}. \end{array} \right.$$

On a :

$$\dim F_1 + \dim G_1 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \dim G_1 = 1 \Rightarrow G_1 = Vect\{n\}.$$

Cherchons un vecteur n avec $F_1 \cap G_1 = \{(0,0,0)\}$ c'est à dire $n \notin F_1$,
mais :

$$\begin{aligned}
F_1 &= Vect\{u, v\} = \{\alpha u + \beta v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha (-2,4,1) + \beta (1,2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(-2\alpha + \beta, 4\alpha + 2\beta, \alpha + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

par exemple pour $\alpha = \beta = 1$ on trouve le vecteur $(-1,6,2) \in F_1$ donc on peut prendre le vecteur $(0,6,2) \notin F_1$, avec :

$$G_1 = Vect\{n\} \Rightarrow \forall k \in G_1, k = \lambda n,\ n = (0,6,2).$$

car si :

$$\begin{aligned}
s &\in F_1 \cap G_1 \Rightarrow s \in F_1 \text{ et } s \in G_1 \\
s &= (-2\alpha + \beta, 4\alpha + 2\beta, \alpha + \beta) \text{ et } s = (0, 6\lambda, 2\lambda) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2\alpha + \beta = 0 ...(1) \\ 4\alpha + 2\beta = 6\lambda ...(2) \\ \alpha + \beta = 2\lambda ...(3) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
(2) - 3 \times (3) &\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \overset{(1)}{\Rightarrow} -\alpha = 0 \\
&\Rightarrow \beta = 0 \text{ et } \lambda = 0, \\
&\Rightarrow u = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Conclusion : $F_1 \oplus G_1 = \mathbb{R}^3$.

b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y + 3z = 0\}$.

$$\begin{aligned}
&3x - y + 3z = 0 \Rightarrow y = 3x + 3z \\
&\Rightarrow F_2 = \{(x, 3x + 3z, z) / x, z \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow F_2 = \{(x, 3x, 0) + (0, 3z, z) / x, z \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow F_2 = \{x (1, 3, 0) + z (0, 3, 1) / x, z \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow F_2 = Vect \{u_1, u_2\} \text{ avec } u_1 (1, 3, 0) \text{ et } u_2 (0, 3, 1),
\end{aligned}$$

Vérifions si $\{u_1, u_2\}$ est libre?

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 (1, 3, 0) + \alpha_2 (0, 3, 1) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow (\alpha_1, 3\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\{u_1, u_2\}$ est une famille libre donc une base de F_2 d'où :

$$\dim F_2 = 2.$$

Déterminons un s.e.v G_2 supplémentaire de F_2 dans $\mathbb{R}^3$.
On a :

$$\dim F_2 + \dim G_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \dim G_2 = 1 \Rightarrow G_2 = vect \{w_2\}.$$

Cherchons un vecteur w_2 avec $F_2 \cap G_2 = \{(0, 0, 0)\}$ c'est à dire $w_2 \notin F_2$,
mais :

$$F_2 = \{(x, 3x + 3z, z) / x, z \in \mathbb{R}\},$$

par exemple pour $x = z = 1$ on trouve le vecteur $(1, 6, 1) \in F_2$, donc on peut prendre le vecteur $(1, 0, 1) \notin F_2$, avec :

$$G_2 = Vect \{w_2\}, w_2 = (1, 0, 1).$$

car si :

$$\begin{aligned}
y &\in F_2 \cap G_2 \Rightarrow y \in F_2 \text{ et } y \in G_2 \\
&\Rightarrow y = (x, 3x + 3z, z) \text{ et } u = (\lambda, 0, \lambda) \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda ...(1) \\ 3x + 3z = 0 ...(2) \\ z = \lambda ...(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
(1), (2) \text{ et } (3) &\Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\
&\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow u = (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Conclusion : $F_2 \oplus G_2 = \mathbb{R}^3$.

(2) Déterminons un supplémentaire de $G_3 = Vect \{u_3\}$ avec $u_3 (2, 1, 1)$.

On a :

$$\dim G_3 = 1,$$

de plus :

$$\dim F_3 + \dim G_3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \dim F_3 = 2 \Rightarrow F_3 = vect\left\{w_1, w_2\right\}.$$

Cherchons deux vecteurs $\{w_1, w_2\}$ libre avec $F_3 \cap G_3 = \{(0,0,0)\}$ c'est à dire $w_1 \notin G_3$ et $w_2 \notin G_3$ mais :

$$G_3 = Vect\left\{u_3\right\} = \left\{\alpha\left(2,1,1\right)/\alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(2\alpha, \alpha, \alpha\right)/x \in \mathbb{R}\right\},$$

par exemple pour $\alpha = 1$ on trouve le vecteur $(2,1,1)$ donc on peut prendre le vecteur $w_1\,(2,1,0)$ et $w_2\,(0,1,1)$ sachant que $w_1, w_2 \notin G_3$avec donc :

$$F_3 = Vect\left\{w_1, w_2\right\}, \text{ avec } w_1\left(2,1,0\right) \text{ et } w_2\left(0,1,1\right),$$

sachant que $\{w_1, w_2\}$ est une famille libre car :

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0 \Rightarrow (2\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Donc $\{w_1, w_2\}$ est une famille libre est libre donc une base de F_3. Donc :

$$\dim F_3 + \dim G_3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Vérifions si $F_3 \cap G_3 = \{(0,0,0)\}$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } e &\in F_3 \cap G_3 \Rightarrow e \in F_3 \text{ et } e \in G_3 \\
&\Rightarrow e = (2\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) \text{ et } e = (2\lambda, \lambda, \lambda) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2\alpha_1 = 2\lambda \Rightarrow \alpha_1 = \lambda \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda \Rightarrow 2\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow e = (0,0,0) \\ \alpha_2 = \lambda \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion : $F_3 \oplus G_3 = \mathbb{R}^3$.