الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 / 3ème série de TD. (Les espaces vectoriels)

Exercice 01 : Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
(1) A &= \left\{\left(x, x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\} \quad (2) B = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\}, \ a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.} \\
(3) C &= \left\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}. \\
(4) \ E_9 &= \{f \in E_1; f(0) = f'(0) = \ 0\}. (E_1 = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ l'ensemble des fonctions dérivables}) \\
(5) \ E_{10} &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \, / \, P' = 3\}.
\end{aligned}$$

Exercice 02 :

(1) Ecrire le vecteur $v = (1, -2, 5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs :

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3) \ \text{ et } v_3 = (2, -1, 1).$$

(2) Ecrire le vecteur $u = (2, -5, 3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs :

$$u_1 = (1, -3, 2), u_2 = (2, -6, 1) \ \text{ et } u_3 = (1, -5, 7).$$

(3) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels, les vecteurs suivants forment-ils une famille génératrice?

$$\begin{aligned}
&a) \ P = 2X^2 - 5, \ Q = 7X \text{ et } R = 3X^2 + 4. \\
&b) P = 1, Q = X \text{ et } R = X(X - 1).
\end{aligned}$$

Exercice 03 : (1) Dans $\mathbb{R}^4$, Soient les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{e_1, e_2\}$? pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{e_1, e_2\}$?

(2) a) Soit a un nombre réel. Pour quelles valeurs de a, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, a), v_2 = (2, 1, a) \ \text{ et } v_3 = (3a, 0, 1),$$

forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

b) Discuter suivant les valeurs de a, la dimension de $A = Vect \ \{v_1, v_2, v_3\}$.

(3) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que les familles suivantes sont libres :

$$F_1 = \{x, e^x\}, F_2 = \{x, \sin x\} \text{ et } F_3 = \{\sin x, \cos x\}.$$

Exercice 04 : $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et P_3 le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \deg P \leq 3\}$.

(1) Montrer que P_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(2) Soient les polynômes $Q_0 = 1, Q_1 = 1 - X, Q_2 = X - X^2$ et $Q_3 = X^2 - X^3$.

a) Vérifier que $B_2 = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une base de P_3.

b) Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 1 + 5X - 3X^2 - X^3$ dans la base B_2.

Exercice 05 : Soient:

$$E_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\},\ E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\right\} \text{ et } E_3 = \{(0,0,c)\,; c \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que E_i avec $i = 1,2,3$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est-elle directe?

Exercice 06 : **(Supplémentaire)** Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(1) Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 07 : Dans $\mathbb{R}_8[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 8. On pose: $E_0 = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ P(0) = 0\}, E_p = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ \forall X \in \mathbb{R},\ P(X) = P(-X)\}$ $E_i = \{P \in \mathbb{R}_8[X] \ / \ P(X) = -P(-X)\}$.

(1) Montrer que E_0, E_P et E_i sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que : $\mathbb{R}_8[X] = E_0 + E_p$ et $\mathbb{R}_8[X] = E_i + E_p$.

(3) Dans quel cas la somme est directe?

Exercice 08 : (1) Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

a) $F_1 = vect\{u, v, w\}$ où $u = (-2,4,1), v(1,2,1)$ et $w = (-3,2,0)$.

b) $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y + 3z = 0\}$.

(2) Déterminer un supplémentaire de $G_3 = vect\{u_3\}$ avec $u_3(2,1,1)$.