الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 /

2ème série de TD. (Les structures algébriques)

Exercice 01: Dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ on définit la loi $*$ par:

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, a * b = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(1) Montrer que $*$ est une l.c.i dans $\mathbb{R}^+$.

(2) La loi $*$ est-elle commutative ? associative ? Justifier.

(3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

(4) Déterminer les éléments symétrisables de $\mathbb{R}^+$.

(5) $(\mathbb{R}^+, *)$ est-il un groupe ? Justifier.

Exercice 02 :

(1) L'ensemble des réels a-t-il une structure de groupe pour l.c.i suivante :

$$x * y = x + y + xy.$$

(2) Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $2 * 3 * x * 5 = 5 * 3$.

Exercice 3 : Dans $E =]-1, 1[$, on définit la loi $*$ par :

$$\forall (a,b) \in E^{\ 2}, a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

(1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne dans E.

(2) Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 04 : Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre du groupe G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, c'est-à-dire :

$$C = \{x \in G, (\forall y \in G)\,(x * y = y * x)\}.$$

Montrer que $(C, *)$ est un sous-groupe de$(G, *)$.

Exercice 05 : On munit $E = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (a, b) \in E^2, a * b = ab + 3(a + b + 2).$$

(1) Vérifier que $*$ est une l.c.i dans E.

(2) Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien (commutatif).

(3) Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f & : & (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (E, *) \\ x & \mapsto & f\ (x) = x - 3. \end{array}$$

Montrer que f est un homomorphisme de groupes ($\cdot$ est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$).