الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI 2021-2022.**
Module : Algèbre 2 / 1ère série de TD. (Les polynômes) Le corrigé

Exercice 01 : Soit le polynôme :

$$P(X) = X^7 - 3X^6 + 8X^5 - 15X^4 + 13X^3 - 5X^2 + 2X - 1.$$

(1) Trouver une racine entière de $P(X)$.

(2) Déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine.

Solution :

Rappel : Résultat sur les racines d'un polynôme à coefficients entiers :
Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$, un polynôme.
On dit que α est une racine de $P(X)$ si $P(\alpha) = 0$.
1) Si $P(X)$ admet une racine rationnelle $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ $(\alpha \in \mathbb{Q}^*)$, alors α_1 divise a_0 et α_2 divise a_n.
2) Si $P(X)$ admet une racine entière α $(\alpha \in \mathbb{Z})$, alors elle doit diviser a_0.
Dans l'exercice :

(1) Trouvons une racine α relative de $P(X)$.

α doit diviser $a_0 = -1$, donc si elle existe :

$$\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1.$$

$$P(1) = 0 \text{ et } P(-1) = -18 \neq 0,$$

donc -1 est la seule racine entière.

(2) Déterminons l'ordre de multiplicité de cette racine.

Rappel :
1) Si α est une racine simple de $P(X)$, alors il existe un polynôme $Q(X)$ tel que:

$$P(X) = (x - \alpha) Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0.$$

De plus :

$$P'(X) = Q(X) + (x - \alpha) Q'(X),$$

ce qui implique que :

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0.$$

2) Par le même argument :
Si α est une racine double de $P(X)$, alors il existe un polynôme $Q(X)$ tel que:

$$P(X) = (x-\alpha)^2 Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0.$$

De plus :

$$P'(\alpha) = 0.\text{et } P^{(2)}(\alpha) \neq 0.$$

3) Si α est une racine d'ordre de multiplicité k de $P(X)$, alors il existe un polynôme $Q(X)$ tel que:

$$P(X) = (x-\alpha)^k Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0.$$

De plus :

$$P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

(l'ordre de multiplicité est l'ordre de la 1ère dérivée différent de zéro) Dans l'exercice :

$$P(X) = X^7 - 3X^6 + 8X^5 - 15X^4 + 13X^3 - 5X^2 + 2X - 1.$$

$$P(1) = 0.$$

$$\begin{aligned} P'(X) &= 7X^6 - 18X^5 + 40X^4 - 60X^3 + 39X^2 - 10X + 2 \\ P'(1) &= 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(X) &= 42X^5 - 90X^4 + 160X^3 - 180X^2 + 78X - 10 \\ P''(1) &= 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P^{(3)}(X) &= 210X^4 - 360X^3 + 480X^2 - 360X + 78 \\ P^{(3)}(1) &= 48 \neq 0, \end{aligned}$$

alors l'ordre de multiplicité de la racine 1 est 3.

Exercice 02 : Montrer que le polynôme :

$P(x) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^n}{n!}$, n'admet pas des racines multiples dans $\mathbb{C}$.

Solution : Si P admet une racine multiple α alors: $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Mais :

$$P'(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!},$$

donc :

$$P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$

valeur qui n'annule pas P donc il n'ya pas de racine multiple.

Exercice 03 : (1) Effectuer la division euclidienne du polynôme P par Q où :

$$P(X) = X^5 + 4X^4 + 6X^3 - 8X^2 + X + 3 \text{ et } Q(X) = X^2 + X + 2.$$

$$\begin{array}{l|l}
X^5 + 4X^4 + 6X^3 - 8X^2 + X + 3 & X^2 + X + 2 \\ \hline
-(X^5 + X^4 + 2X^3) & X^3 + 3X^2 + X - 15 \\
3X^4 + 4X^3 - 8X^2 + X + 3 & \\
-(3X^4 + 3X^3 + 6X^2) & \\
X^3 - 14X^2 + X + 3 & \\
-(X^3 + X^2 + 2X) & \\
-15X^2 - X + 3 & \\
-(-15X^2 - 15X - 30) & \\
14X + 33 &
\end{array}$$

Donc :

$$\frac{X^5 + 4X^4 + 6X^3 - 8X^2 + X + 3}{X^2 + X + 2} = X^3 + 3X^2 + X - 15 + \frac{14X + 33}{X^2 + X + 2}.$$

(2) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 du polynôme P par Q où :

$$P(X) = X^5 + 4X^4 + 6X^3 - 8X^2 + X + 3 \text{ et } Q(X) = X^2 + X + 2.$$

$$\begin{array}{l|l}
3 + X - 8X^2 + 6X^3 + 4X^4 + X^5 & 2 + X + X^2 \\ \hline
-\left(3 + \frac{3}{2}X + \frac{3}{2}X^2\right) & \frac{3}{2} - \frac{1}{4}X - \frac{9}{4}X^2 + \frac{34}{8}X^3 \\
-\frac{1}{2}X - \frac{19}{2}X^2 + 6X^3 + 4X^4 + X^5 & \\
-\left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{4}X^3\right) & \\
-\frac{9}{2}X^2 + \frac{25}{4}X^3 \qquad \underbrace{+4X^4 + X^5}_{\text{Termes on plus (dépasse l'ordre)}} & \\
-\left(-\frac{9}{2}X^2 - \frac{9}{4}X^3\right) & \\
\frac{34}{4}X^3 &
\end{array}$$

Exercice 04 : Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme P par Q dans les deux cas suivants :

(1) $P(X) = X^n + (X - 1)^n + 1$ et $Q(X) = X^2 - X.$

(2) $P(X) = (\cos\theta + X\sin\theta)^n$ avec $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$ et $Q(X) = X^2 + 1.$

Solution :

$$(1) P(X) = X^n + (X - 1)^n + 1 \text{ et } Q(X) = X^2 - X.$$

Puisque le quotient $Q(X)$ est un polynôme de degré 2 alors le reste est de la forme $R(X) = aX + b$ avec $P(X) = H(X)Q(X) + R(X)$. Mais les racines de $Q(X)$ sont 0 et 1 donc:

$$\begin{cases} P(1) = 2 = R(1) = a + b, \\ P(0) = 1 + (-1)^n = R(0) = b. \end{cases}$$

Ce qui implique que $b = 1 + (-1)^n$ et $a = 2 - b = 2 - [1 + (-1)^n] = 1 - (-1)^n$.
Conclusion: Le reste est le polynôme $R(X) = aX + b = [1 - (-1)^n] X + 1 + (-1)^n$.

$$(2) P(X) = (\cos\theta + X \sin\theta)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R} \text{ et } Q(X) = X^2 + 1.$$

Puisque le quotient $Q(X)$ est un polynôme de degré 2 alors le reste est de la forme $R(X) = aX + b$ avec $P(X) = H(X) Q(X) + R(X)$. Mais les racines de $Q(X)$ sont i et $(-i)$ donc:

$$\begin{cases} P(i) = H(i) Q(i) + R(i) \Rightarrow P(i) = R(i), \\ P(-i) = H(-i) Q(-i) + R(-i) \Rightarrow P(-i) = R(-i). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos\theta + i\sin\theta)^n = ai + b \Rightarrow (\cos n\theta + i \sin n\theta) = ai + b, \\ (\cos\theta - i\sin\theta)^n = a(-i) + b \Rightarrow (\cos n\theta - i \sin n\theta) = -ai + b. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad a = \sin n\theta \text{ et } b = \cos n\theta.$$

Conclusion: Le reste est le polynôme $R(X) = aX + b = (\sin n\theta) X + \cos n\theta$.

Exercice 05 : Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$(1) \frac{1}{x^4 - x}; (2) \frac{x+5}{(x-3)^3 (x^2 + x + 1)} \text{ et } (3) \frac{x^6}{(x^2+1)^2 (x+1)^2}.$$

Solution :

$$(1) \frac{1}{x^4 - x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 - x} &= \frac{1}{x(x^3 - 1)} = \frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x-1} + \frac{\alpha_3 x + \alpha_4}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x^3 - 1)} = -1.$$

$$\alpha_2 = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3}.$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \triangle = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} \frac{1}{x(x-1)} &= \lim_{x \to x_1} (\alpha_3 x + \alpha_4) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - 1\right)} = \alpha_3 \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + \alpha_4 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} i\sqrt{3} = \left(-\frac{\alpha_3}{2} + \alpha_4\right) - i\frac{\alpha_3\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\alpha_3}{2} + \alpha_4 = 0 \\ -\frac{\alpha_3\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \frac{\alpha_3}{2} = \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = \frac{2}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$(2)\ \frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)} = \frac{\alpha_1}{(x-3)} + \frac{\alpha_2}{(x-3)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-3)^3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+x+1}.$$

1ère méthode :

$$\alpha_3 = \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{(x^2+x+1)} = \frac{8}{13}.$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \triangle = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_1} \frac{x+5}{(x-3)^3} &= \lim_{x\to x_1} (\alpha_4 x + \alpha_5) \\
&\Rightarrow \frac{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+5}{(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}-3)^3} = \alpha_4\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + \alpha_5 \\
&\Rightarrow -\frac{261}{4394} + \frac{197}{4394} i\sqrt{3} = \left(-\frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5\right) - i\frac{\alpha_4\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5 = -\frac{261}{4394} \\ \frac{197}{4394}\sqrt{3} = -\frac{\alpha_4\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_5 = -\frac{261}{4394} - \frac{197}{4394} = -\frac{229}{2197}. \\ \alpha_4 = -\frac{197}{2197}. \end{array}\right.$$

Il nous reste les constantes α_1 et α_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)} &= \frac{\alpha_1}{(x-3)} + \frac{\alpha_2}{(x-3)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-3)^3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+x+1}. \\
x\frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)} &= x\left[\frac{\alpha_1}{(x-3)} + \frac{\alpha_2}{(x-3)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-3)^3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+x+1}\right]. \\
\lim_{x\to+\infty} x\frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)} &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\alpha_1}{(x-3)} + \frac{\alpha_2}{(x-3)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-3)^3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+x+1}\right] \\
0 &= \alpha_1 + 0 + 0 + \alpha_4 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_4 = \frac{197}{2197}.
\end{aligned}$$

Pour α_2, il suffit de choisir une valeur de x, par exemple $x=0$ et par identificationon trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{-27} &= \frac{\alpha_1}{-3} + \frac{\alpha_2}{9} + \frac{\alpha_3}{-27} + \alpha_5 \\
&\Rightarrow \alpha_2 = 9\left(-\frac{5}{27} + \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_3}{27} - \alpha_5\right) \\
&\Rightarrow \alpha_2 = 9\left(-\frac{5}{27} + \frac{197}{6591} + \frac{8}{351} + \frac{229}{2197}\right) \\
&= -\frac{43}{169}.
\end{aligned}$$

2ème méthode : Pour calculer les coefficients des facteurs linéaires répétés :

$$\frac{x+5}{(x-3)^3(x^2+x+1)} = \frac{\alpha_1}{(x-3)} + \frac{\alpha_2}{(x-3)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-3)^3} + \frac{\alpha_4 x + \alpha_5}{x^2+x+1}.$$

On pose : $y = x-3 \Rightarrow x = y+3$.

$$\frac{y+8}{y^3\left((y+3)^2+(y+3)+1\right)} = \frac{y+8}{y^3(y^2+6y+9+y+3+1)}$$

Il suffit de prendre les monômes de degré ≤ 2 (l'ordre de multiplicité moins un) dans l'ordre croissante mais sans le facteur linéaire qui se répéte, pour faire une divission suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 :

$$\frac{8+y}{13+7y+y^2}$$

$$\begin{array}{l|l}
8+y & 13+7y+y^2 \\ \hline
-\left(8+\frac{56}{13}y+\frac{8}{13}y^2\right) & \frac{8}{13}-\frac{43}{169}y+\frac{197}{2197}y^2 \\
-\frac{43}{13}y-\frac{8}{13}y^2 & \\
-\left(-\frac{43}{13}y-\frac{301}{169}y^2\right) & \\
\frac{197}{169}y^2 &
\end{array}$$

Ensuite si on divise le quotient par y^3 on trouve que :

$$\alpha_1 = \frac{197}{2197}, \alpha_2 = -\frac{43}{169} \text{ et } \alpha_3 = \frac{8}{13}.$$

$$(3)\ \frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} &= \frac{x^6}{(x^4+2x^2+1)(x^2+2x+1)} \\
&= \frac{x^6}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^6 & x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1 \\ \hline
-\left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\right) & 1 \\
-2x^5-3x^4-4x^3-3x^2-2x-1 &
\end{array}$$

Donc :

$$\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x^5-3x^4-4x^3-3x^2-2x-1}{(x^2+1)^2(x+1)^2}.$$

Pour :

$$\frac{-2x^5-3x^4-4x^3-3x^2-2x-1}{(x^2+1)^2(x+1)^2} = \frac{\alpha_1}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(x^2+1)} + \frac{\alpha_5 x + \alpha_6}{(x^2+1)^2}.$$

Pour α_1 et α_2 : On pose $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

$$\begin{aligned}
& \frac{-2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{\left(x^2+1\right)^2 (x+1)^2} \\
= \quad & \frac{-2(y-1)^5 - 3(y-1)^4 - 4(y-1)^3 - 3(y-1)^2 - 2(y-1) - 1}{\left((y-1)^2+1\right)^2 y^2}
\end{aligned}$$

En effectuons une division suivants les puissances croissantes à l'ordre 1 (il faut prendre que les monômes de degré ≤ 1 et sans le terme y^2)

$$\begin{aligned}
& \frac{-2(5y-1) - 3(-4y+1) - 4(y-1) - 3(-2y+1) - 2(y-1) - 1}{(-8y+4)} \\
= \quad & \frac{1+2y}{4-8y}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
1 + 2y & 4 - 8y \\
-(1-2y) & \frac{1}{4} + y \\
4y &
\end{array}$$

ce qui implique que :

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \text{ et } \alpha_1 = 1.$$

Remarque : Pour α_2 on peut affirmer nos calculs.

$$\alpha_2 = \lim_{x \to -1} \frac{-2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to i} (\alpha_5 x + \alpha_6) \quad & = \quad \lim_{x \to i} \left(\frac{-2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2} \right) \\
& \Rightarrow \quad \alpha_5 i + \alpha_6 = \frac{-2i - 3 + 4i + 3 - 2i - 1}{(i+1)^2} = \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2} i \\
& \Rightarrow \quad \alpha_6 = 0 \text{ et } \alpha_5 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Il nous reste que α_3 et α_4 :

$$\frac{-2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{\left(x^2+1\right)^2 (x+1)^2} = \frac{\alpha_1}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_3 x + \alpha_4}{\left(x^2+1\right)} + \frac{\alpha_5 x + \alpha_6}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Pour $x = 0$:

$$-1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 \Rightarrow \alpha_4 = -(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6) = -\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{4}.$$

Pour α_3 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{-2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{\left(x^2+1\right)^2 (x+1)^2} \right) \quad & = \quad \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\alpha_1}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_3 x + \alpha_4}{\left(x^2+1\right)} + \frac{\alpha_5 x + \alpha_6}{\left(x^2+1\right)^2} \right) \\
& \Rightarrow \quad -2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = -2 - \alpha_1 = -2 - 1 = -3.
\end{aligned}$$