Université de Tlemcen | Rattrapage | 20 juin 2022
Faculté des Sciences | Structure Machine2 | 1h30 mn
Département de Mathématiques | S2-L1-MI | Auteur: Mme Chouraqui

---

Exercice 1 (5 points). *Soit A, B deux variables logiques.*

1. *(1 ½ points) Exprimer la fonction XOR ; $A \oplus B$ comme produit de sommes.*
2. *(3 ½ points) Réaliser le circuit logique correspondant en n'utilisant que des portes NORs à deux entrées ; en précisant l'expression correspondante.*

Exercice 2 (7 points).

(A) Un demi-soustracteur permet de soustraire deux bits A_i, B_i et de donner la différence D_i et un emprunt E_i

1. *(1 points) A l'aide d'une table de vérité d'un demi-soustracteur ; montrer que $D_i = A_i \oplus B_i$ et $E_i = \overline{A}_i.B_i$.*
2. *(1 point) Réaliser le circuit d'un demi-soustracteur.*

(B) Pour obtenir un soustracteur binaire complet, il faut tenir compte d'un emprunt antérieur E_{i-1}, il présente donc trois entrées A_i, B_i, E_{i-1} et deux sorties ; D_i et E_i

1. *(2 points) A l'aide d'une table de vérité d'un soustracteur complet ; montrer que $D_i = (A_i \oplus B_i) \oplus E_{i-1}$ et $E_i = \overline{A}_i.B_i + (\overline{A_i \oplus B_i}).E_{i-1}$.*
2. *(1 point) Réaliser le circuit d'un soustracteur binaire complet avec deux demi-soustracteurs.*
3. *(2 points) Montrer que $E_i = \overline{A}_i.(B_i \oplus E_{i-1}) + B_i.E_{i-1}$, réaliser ensuite le circuit d'un soustracteur binaire complet avec un demi-additionneur[1] et un demi-soustracteur.*

Exercice 3 (8 points). *Soit f une fonction logique définie par*

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,4,5,6,7,8,13,15)$$

1. *(2 points) Donner les formes canoniques disjonctives et conjonctives simplifiées de f.*
2. *(1 point) Réaliser le logigramme de f avec des portes NANDs uniquement.*

---

1. Un demi-additionneur réalise l'additon de deux bits A_i, B_i, il génère deux sorties $S = A_i \oplus B_i$ et $R_{sor} = A_i.B_i$.

3. *(1 point) Réaliser le logigramme de f avec des portes NORs uniquement.*
4. *(2 points) Réaliser f avec un MUX $8 \rightarrow 1$ et des portes logiques.*
5. *(2 points) Réaliser f avec un MUX $4 \rightarrow 1$ et des portes logiques.*

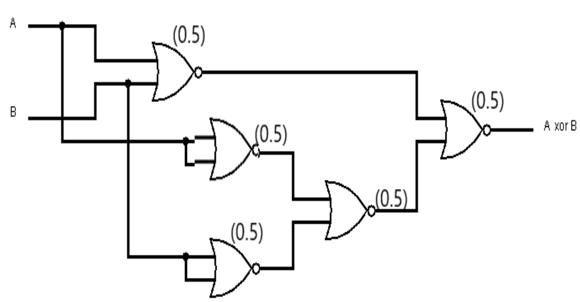
Exercice 1 (5 points). *Soit A, B deux variables logiques.*

1. *(1.5 points) Exprimer la fonction XOR ; $A \oplus B$ comme produit de sommes.*

> ***Solution:*** $A \oplus B \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} \overline{A}.B + A.\overline{B} \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} A.\overline{A} + \overline{A}.B + A.\overline{B} + B.\overline{B} = \overline{A}(A+B) + (A+B).\overline{B} \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} (A+B).(\overline{A}+\overline{B})$.
>
> *ou* $A \oplus B \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} \overline{A}.B + A.\overline{B} \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} (\overline{A}.B + A).(\overline{A}.B + \overline{B}) \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} (A+B).(\overline{A}+\overline{B})$

2. *(3.5 points) Réaliser le circuit logique correspondant en n'utilisant que des portes NORs à deux entrées ; en précisant l'expression correspondante.*

> ***Solution:*** $A \oplus B \underbrace{=}_{\mathbf{(0.25)}} \overline{\overline{(A+B).(\overline{A}+\overline{B})}} \underbrace{=}_{\mathbf{(0.25)}} \overline{\overline{(A+B)} + \overline{\overline{(\overline{A}+\overline{B})}}} \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} \overline{\overline{(A+B)} + \overline{\overline{\overline{A+A} + \overline{B+B}}}}$



Exercice 2 (7 points).

(A) *Un demi-soustracteur permet de soustraire deux bits A_i, B_i et de donner la différence D_i et un emprunt E_i*

1. *(1 points) A l'aide d'une table de vérité d'un demi-soustracteur ; montrer que $D_i = A_i \oplus B_i$ et $E_i = \overline{A}_i.B_i$.*

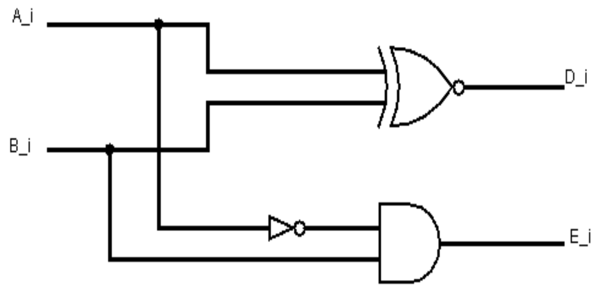
> ***Solution:***

A_i	B_i	D_i	E_i
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$D_i = \overline{A}_i.B_i + A_i.\overline{B}_i \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} A_i \oplus B_i$ et $E_i \underbrace{=}_{\mathbf{(0.5)}} \overline{A}_i.B_i$

2. *(1 point) Réaliser le circuit d'un demi-soustracteur.*

Solution:



(01)

(B) Pour obtenir un soustracteur binaire complet, il faut tenir compte d'un emprunt antérieur E_{i-1}, il présente donc trois entrées A_i, B_i, E_{i-1} et deux sorties ; D_i et E_i

1. *(2 points) A l'aide d'une table de vérité d'un soustracteur complet ; montrer que $D_i = (A_i \oplus B_i) \oplus E_{i-1}$ et $E_i = \overline{A}_i.B_i + (\overline{A_i \oplus B_i}).E_{i-1}$.*

Solution:

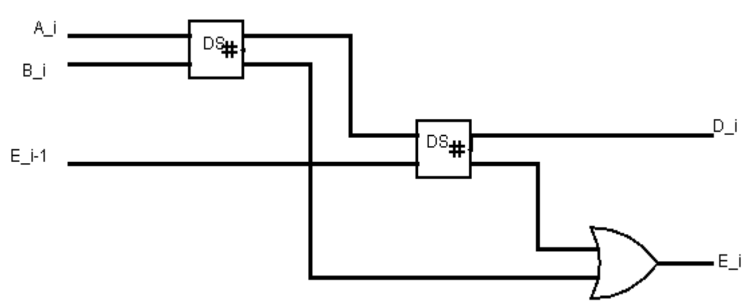
A_i	B_i	E_{i-1}	D_i	E_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$D_i \underbrace{=}_{(\mathbf{0.5})} \overline{A}_i.\overline{B}_i.E_{i-1} + \overline{A}_i.B_i.\overline{E}_{i-1} +$$
$$+ A_i.\overline{B}_i.\overline{E}_{i-1} + A_i.B_i.E_{i-1} =$$
$$= (\overline{A}_i.B_i + A_i.\overline{B}_i).\overline{E}_{i-1} + (\overline{A}_i\overline{B}_i + A_i.B_i).E_{i-1} =$$
$$= (A_i \oplus B_i).\overline{E}_{i-1} + (\overline{A_i \oplus B_i}).E_{i-1} =$$
$$\underbrace{= (A_i \oplus B_i) \oplus E_{i-1}}_{(\mathbf{0.5})}$$

$$E_i \underbrace{=}_{(\mathbf{0.5})} \overline{A}_i.\overline{B}_i.E_{i-1} + \overline{A}_i.B_i.\overline{E}_{i-1} + \overline{A}_i.B_i.E_{i-1} +$$
$$+ A_iB_i.E_{i-1} = \underbrace{\overline{A}_i.B_i + (\overline{A_i \oplus B_i}).E_{i-1}}_{(\mathbf{0.5})}$$

2. *(1 point) Réaliser le circuit d'un soustracteur binaire complet avec deux demi-soustracteurs.*

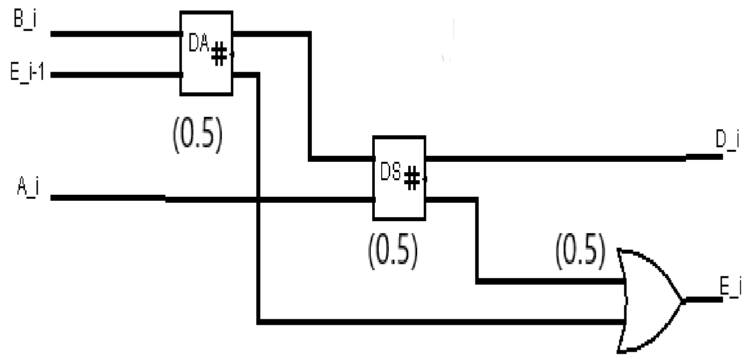
Solution:



(01)

3. *(2 points) Montrer que $E_i = \overline{A}_i.(B_i \oplus E_{i-1}) + B_i.E_{i-1}$, réaliser ensuite le circuit d'un soustracteur binaire complet avec un demi-additionneur[1] et un demi-soustracteur.*

Solution: $E_i = \overline{A}_i.\overline{B}_i.E_{i-1} + \overline{A}_i.B_i.\overline{E}_{i-1} + \overline{A}_i.B_i.E_{i-1} + A_iB_i.E_{i-1} \underbrace{=}_{(\mathbf{0.5})} \overline{A}_i(B_i \oplus E_{i-1}) + B_i.E_{i-1}$



Exercice 3 (8 points)**.** *Soit f une fonction logique définie par*

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,4,5,6,7,8,13,15)$$

1. *(2 points) Donner les formes canoniques disjonctives et conjonctives simplifiées de f.*

Solution:

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

(0.5)

En formant des groupes contenants des 1 ; on obtient la forme canonique disjonctive

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}.b + b.d + \overline{b}.\overline{c}.\overline{d}\ (\mathbf{0.75}),$$

on obtient la forme canonique conjonctive ; en formant des groupes contenants des 0, ensuite on élimine la variable qui change de complémentarité et on garde le reste

1. Un demi-additionneur réalise l'additon de deux bits A_i, B_i, il génère deux sorties $S = A_i \oplus B_i$ et $R_{sor} = A_i.B_i$.

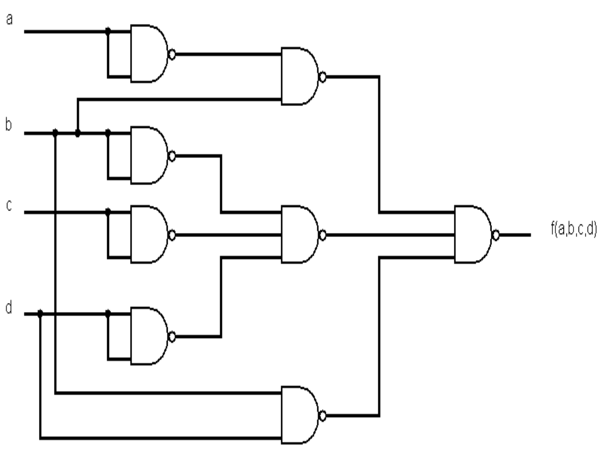
des variables (somme) ; en remplaçant le 0 par la variable correspondante et le 1 par le complément ;

$$f(a,b,c,d) = (b+\overline{d}).(\overline{a}+\overline{b}+d).(b+\overline{c}) \ (\mathbf{0.75})$$

2. *(1 point) Réaliser le logigramme de f avec des portes NANDs uniquement.*

Solution:
En utilisant la forme canonique disjonctive ; on obtient

$$f(a,b,c,d) = \overline{(\overline{\overline{a.a}.b}).\overline{b.d}.\overline{\overline{b.b}.\overline{c.c}.\overline{d.d}}}.$$

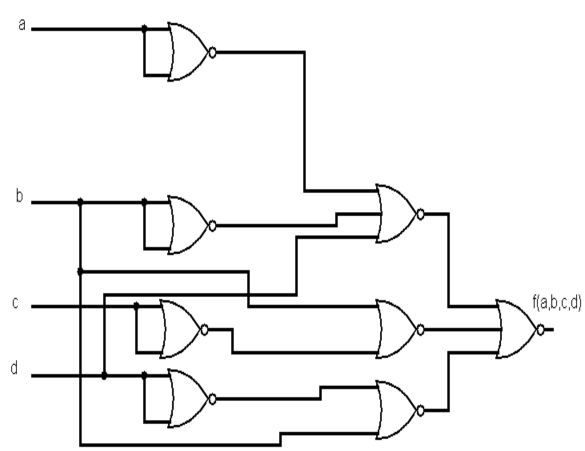


(01)

3. *(1 point) Réaliser le logigramme de f avec des portes NORs uniquement.*

Solution:
En utilisant la forme canonique conjonctive ; on obtient

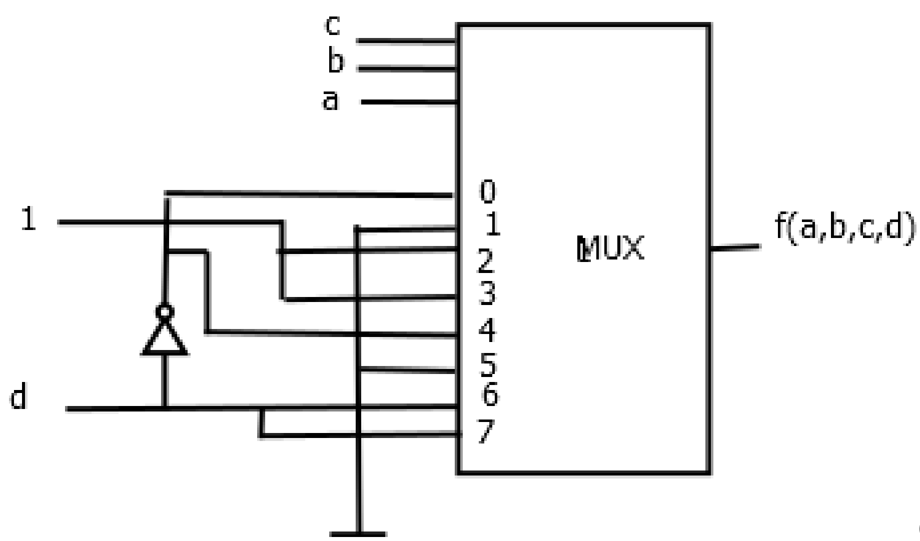
$$f(a,b,c,d) = \overline{\overline{b+\overline{d+d}}+\overline{\overline{a+a}+\overline{b+b}+d}+\overline{b+\overline{c+c}}}$$



(01)

4. *(2 points) Réaliser f avec un MUX $8 \to 1$ et des portes logiques.*

Solution: $f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c}.d + \overline{a}.b.c.\overline{d} + \overline{a}.b.c.d + a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + a.b.\overline{c}.d + a.b.c.d = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}(\overline{d}) + \overline{a}.b.\overline{c}(\overline{d}) + \overline{a}.b.\overline{c}(d) + \overline{a}.b.c(\overline{d}) + \overline{a}.b.c(d) + a.\overline{b}.\overline{c}(\overline{d}) + a.b.\overline{c}(d) + a.b.c(d) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}(\overline{d}) + \overline{a}.b.\overline{c}(\overline{d}+d) + \overline{a}.b.c(\overline{d}+d) + a.\overline{b}.\overline{c}(\overline{d}) + a.b.\overline{c}(d) + a.b.c(d) = \underbrace{\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}}_{000}(\overline{d}) + \underbrace{\overline{a}.b.\overline{c}}_{010}(1) + \underbrace{\overline{a}.b.c}_{011}(1) + \underbrace{a.\overline{b}.\overline{c}}_{100}(\overline{d}) + \underbrace{a.b.\overline{c}}_{110}(d) + \underbrace{a.b.c}_{111}(d)$.**(01)**

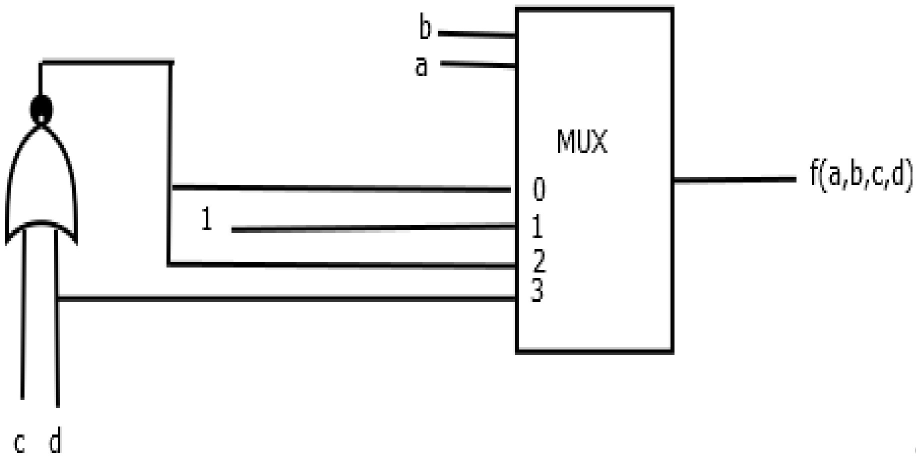


(01)

5. *(2 points) Réaliser f avec un MUX $4 \to 1$ et des portes logiques.*

Solution:
$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d}) + \overline{a}.b.(\overline{c}.\overline{d}) + \overline{a}.b(\overline{c}.d) + \overline{a}.b.(c.\overline{d}) + \overline{a}.b(c.d) + a.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d}) + a.b(\overline{c}.d) + a.b(c.d) = \overline{a}.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d}) + \overline{a}.b(\overline{c}.\overline{d} + \overline{c}.d + c.\overline{d} + c.d) + a.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d}) + a.b(\overline{c}.d + c.d) = \overline{a}.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d}) +$

$\overline{a}.b(\overline{c}(\overline{d}+d)+c.(\overline{d}+d))+a.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d})+a.b(d(\overline{c}+c)) = \overline{a}.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d})+\overline{a}.b(\overline{c}+c)+a.\overline{b}(\overline{c}.\overline{d})+a.b(d) =$
$\underbrace{\overline{a}.\overline{b}}_{00}(\overline{c}.\overline{d}) + \underbrace{\overline{a}.b}_{01}(1) + \underbrace{a.\overline{b}}_{10}(\overline{c}.\overline{d}) + \underbrace{a.b}_{11}(d).$**(01)**



(01)