Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2021/2022

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 2

Examen de rattrapage : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts). On se propose de calculer $I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

1) Montrer que
$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du.$$

2) En déduire que
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du.$$

3) Calculer la valeur de I.

Exercice 2. (5 Pts)

1) Déterminer sur $]0, +\infty[$,
$$J = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

2) En déduire la primitive suivante
$$J_0 = \int \frac{arctan(x)}{x^2}dx.$$

Exercice 3. (5 Pts).

On considère la fonction
$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f.

2) Montrer que
$$\forall x \in D_f, \qquad f'(x) = 0.$$

3)En déduire la valeur de
$$a = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$$

Exercice 4. (5 Pts).

On considère la fonction
$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}\sqrt{1+x}}{1+x^2}.$$

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.

2) En déduire
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^{-x}\sqrt{1+x})\sin(x)}{x^2(1+x^2)}$$

On donne :
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1ère année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts).

On a

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

1) Montrons que $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du.$

Posons $x = \pi - u$, alors $dx = -du$. **(0.25 Pt)**

Si $x = 0$, alors $u = \pi$ et si $x = \pi$, alors $u = 0$. **(0.5 Pt)**

Donc,

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}du. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Sachant que

$$\sin(\pi-u) = \sin(\pi)\cos(u) - \sin(u)\cos(u) = \sin(u) \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

et

$$\cos(\pi-u) = \cos(\pi)\cos(u) + \sin(\pi)\sin(u) = -\cos(u), \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

alors

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du. \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

2) On a

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx + \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx. \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

3) On a

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Posons $t = \cos(x)$, alors $dt = -\sin(x)dx$. **(0.5 Pt)**

Remarquons que pour $x = 0$, on a $t = 1$ et pour $x = \pi$, on a $t = -1$. **(0.5 Pt)**

Ainsi,

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\left[\arctan(t)\right]_{-1}^{1} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\arctan(1) - \arctan(-1)\right) = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Exercice 2. (5 Pts).

1) On a

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}.$$

Par identification,

$$a=1, \quad b=-1 \quad \text{et} \quad c=0.$$

Donc,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Ainsi,

$$J = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

2) On utilise une intégration par partie ($\int UV' = UV - \int U'V$). **(0.5 Pt)**

On pose

$$\begin{cases} U(x) = \arctan(x) \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{x^2+1} \\ V'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \quad \textbf{(1Pt)}$$

Ainsi,

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arctan(x) + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan(x) + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Exercice 3. (5 Pts).

1) Sachant que $\arctan(t)$ est bien définie pour $t \in \mathbb{R}$, alors on remarque que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$.

Ainsi,

$$D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]-1,+\infty[. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

2) On a

$$\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \left(\arctan(\frac{1}{1+x})\right)' + \left(\arctan(\frac{x}{x+2})\right)'$$

$$= \frac{(\frac{1}{x+1})'}{1+(\frac{1}{x+1})^2} + \frac{(\frac{x}{x+2})'}{1+(\frac{x}{x+2})^2} \quad \textbf{(1Pt)}$$

$$= \frac{-1}{2+x^2+2x} + \frac{2}{2x^2+4x+4} = \frac{-2x^2-4x-4+4+2x^2+4x}{(2+x^2+2x)(2x^2+4x+4)} = 0. \quad \textbf{(2Pts)}$$

3) Puisque $\forall x \in D_f, \quad f'(x)=0$, alors ceci veut dire que f est constante. **(0.5 Pt)** En particulier, pour $x=0$,

$$f(0) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc,

$$a = f(1) = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Exercice 4. (5 Pts). 1) On a au voisinage de 0 les développements suivants

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Alors,

$$\begin{aligned} e^{-x}\sqrt{1+x} &= (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2). \quad (\mathbf{1Pt}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-x}\sqrt{1+x}}{1+x^2} &= (1 - x^2 + o(x^2))(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2). \quad (\mathbf{1Pt}) \end{aligned}$$

2) On sait qu'au voisinage de 0, on a $\sin(x) = x + o(x^2)$. $\quad (\mathbf{0.5\ Pt})$ Alors,

$$\left(\frac{1 - e^{-x}\sqrt{1+x}}{1+x^2}\right)\left(\frac{\sin(x)}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\left(\frac{x + o(x^2)}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + o(x). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^{-x}\sqrt{1+x})\sin(x)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{8} + o(x)\right) = \frac{1}{2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$